



UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO

ESCUELA DE POSGRADO

Registros de representación semiótica para el aprendizaje significativo de la integral definida y sus aplicaciones en el cálculo integral-nivel universitario

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE:

Maestro en Educación con mención en docencia y gestión educativa

AUTOR:

Br. Holger Andrés Espinola López
(ORCID 0000-0002-9174-6961)

ASESORA:

Dra. Kony Luby Durán LLaro
(ORCID 0000-0003-4825-3683)

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN:

Innovación pedagógica

Trujillo – Perú

2019

Página del jurado

Dr. Ramón Asunción Lezcano Tello.

PRESIDENTE

Mg. Víctor Ivan Pereda Guanilo.

SECRETARIO

Dra. Kony Luby Durán Llaro.

VOCAL

Dedicatoria

Mi tesis la dedico a la Inteligencia Infinita que desde la supra realidad ha observado e influenciado en mi desarrollo evolutivo en las diversas realidades del Multiverso.

A mis padres Andrés y Santos, que siempre me obsequiaron su amor y protección incondicional, induciéndome la sabiduría que el desarrollo del ser es más importante que el tener y que la educación es la vía más segura del progreso personal y colectivo.

A mi segunda madre Luzmila, in memoriam, por encaminarme desde temprano en los mejores valores humanos y haber recibido de ella abundante amor y protección en el preámbulo de mi vida.

A mi abuela Juanita, Marcionila, Zoraida, Arístides y Román, in memoriam, por haber escuchado con mucha atención mis relatos sobre aspectos de la ciencia y de la cultura, haberlos valorado y disfrutado mucho.

A mi esposa Mary por la excelente manifestación de su amor expresado en su completa dedicación a la familia que formamos.

A mis hijos Holger, Cynthia y Khriss, como muestra del amor singular que tengo por ellos.

Agradecimiento

Agradezco a toda mi familia cercana por haber permeado en mí el inefable amor por la ciencia, por haber aceptado dedicar mi vida a la docencia en matemática, la pasión que siempre ha embargado el sentido de mi vida. A la Universidad Nacional de Trujillo, donde pasé extraordinarios años de mi vida estudiando las exuberantes maravillas de la matemática. A la Universidad de Brasilia que me mostró la supra belleza de la matemática. A la Universidad César Vallejo, que admitió mi consolidación en el post grado. A la Universidad Privada del Norte por incorporarme a su gran familia con gesto muy loable. Al maestro Felfe Cerna, por sus valiosas sugerencias en la elaboración de los “planos” de este trabajo. A mi hijo Holger por sus sugerencias para la elección de la praxeología. A la Dra. Kony Durán, mi orientadora, por su inspiración y confianza que este trabajo se realizaría, por sus valiosas orientaciones, sugerencias y su paciente espera.

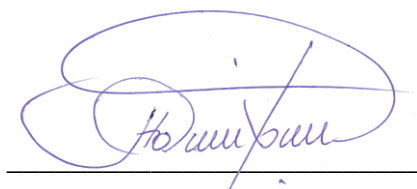
Declaración de Autenticidad

Yo, Holger Andrés Espinola López, egresado de la Escuela de post grado de la Universidad César Vallejo, filial-Trujillo; declaro que el trabajo académico titulado “Registros de representación semiótica para el aprendizaje significativo de la integral definida y sus aplicaciones en el cálculo integral-nivel universitario” presentado en 106 folios para la obtención del grado académico de Maestro en Docencia Universitaria, es de mi autoría.

Por lo tanto, declaro lo siguiente:

- He mencionado todas las fuentes empleadas en el presente trabajo de investigación, identificando correctamente toda cita textual o de paráfrasis proveniente de otras fuentes, de acuerdo a lo establecido por las normas de elaboración de trabajos académicos.
- No he utilizado ninguna otra fuente distinta de aquellas expresamente señaladas en este trabajo.
- Este trabajo de investigación no ha sido previamente presentado completa ni parcialmente para la obtención de otro grado académico o título profesional.
- Soy consciente de que mi trabajo puede ser revisado electrónicamente en búsqueda de plagios.
- De encontrar uso de material intelectual ajeno sin el debido reconocimiento de su fuente o autor, me someto a las sanciones que determinan el procedimiento disciplinario.

Trujillo, 07 de noviembre del 2019



Holger Andrés Espinola López

DNI: 17942679

ÍNDICE

Carátula.....	
Página del jurado.....	ii
Dedicatoria.....	iii
Agradecimiento.....	iv
Declaratoria de autenticidad.....	v
Índice.....	vi
RESUMEN.....	vii
ABSTRACT.....	viii
I. INTRODUCCIÓN.....	9
II. MÉTODO.....	50
2.1. Tipo y diseño de investigación.....	50
2.2. Escenario de estudio.....	50
2.3. Participantes.....	50
2.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos.....	51
2.5. Procedimiento.....	51
2.6. Método de análisis de información.....	52
2.7. Aspectos éticos.....	54
III. RESULTADOS	55
IV. DISCUSIÓN.....	60
V. CONCLUSIONES.....	62
VI. RECOMENDACIONES.....	63
REFERENCIAS.....	65
ANEXOS.....	69

RESUMEN

Se presenta una propuesta de trayectoria didáctica para la enseñanza de la integral definida y sus aplicaciones desde la concepción del cálculo integral como análisis matemático por infinitesimales, tomando como punto de partida un sistema de prácticas o praxeología (Godino, 2002 y Font, Godino y Gallardo, 2013) de la cual emergen los objetos matemáticos que ontológicamente son de naturaleza cognitiva y cuyo único acceso se viabiliza mediante sus representaciones semióticas, que siguiendo a Duval (1993, 2006) los movilizamos en diversidad, con sus transformaciones de conversión y tratamiento (que son un todo en la resolución de problemas), coordinándolos y evitando paradojas cognitivas y conflictos semióticos en el aprendizaje al apoyarnos en estrategias didácticas que utilizan el software dinámico e interactivo GeoGebra (López, F., Nieto, Antolín y López, P. 2013). Enfatizamos la importancia de las representaciones semióticas de los objetos matemáticos, a priori diferenciando ambas cosas, concordando con Duval, que estas juegan un papel fundamental en la actividad matemática; por eso proponemos y caracterizamos la estructura de un modelo de registros de representación semiótica para la integral definida y sus aplicaciones a la ingeniería y lo fundamentamos con los estudios ontológicos de Pecharromán (2013, 2014), las teorías de los registros de representación semiótica de Duval (1993, 2006), los desarrollos teóricos ontosemióticos de Godino (2002) y los estudios sobre la conceptualización constructivista de D'Amore (2004). Aquí está la relevancia de nuestro estudio, que aparte de ser una propuesta que visa a generar aprendizajes significativos de la integral definida y sus aplicaciones, este se enmarca dentro de la convergencia de disciplinas como la didáctica matemática, ontología, semiótica y teoría cognitiva.

Palabras clave: Registros de representación semiótica, integral definida, geogebra e integral definida, aplicaciones de la integral definida, conversión y tratamiento.

ABSTRACT

A proposal of didactic trajectory for the teaching of the definite integral and its applications is presented from the conception of the integral calculus as mathematical analysis by infinitesimals, taking as a starting point a system of practices or praxeology (Godino, 2002 and Font, Godino and Gallardo, 2013) from which the mathematical objects emerge that are ontologically cognitive in nature and whose only access is made possible through their semiotic representations, which following Duval (1993, 2006) we mobilize them in diversity, with their conversion and treatment transformations (which they are a whole in solving problems), coordinating them and avoiding cognitive paradoxes and semiotic conflicts in learning by supporting us in didactic strategies that use GeoGebra dynamic and interactive software (López, F., Nieto, Antolín and López, P. 2013). We emphasize the importance of semiotic representations of mathematical objects, a priori differentiating both, agreeing with Duval, that these play a fundamental role in mathematical activity; That is why we propose and characterize the structure of a model of semiotic representation records for the definite integral and its applications to engineering and we base it with the ontological studies of Pecharromán (2013, 2014), the theories of Duval's semiotic representation records (1993, 2006), the ontosemiotic theoretical developments of Godino (2002) and the studies on the constructivist conceptualization of D'Amore (2004). Here is the relevance of our study, which apart from being a proposal that seeks to generate significant learning of the definite integral and its applications, this is framed within the convergence of disciplines such as mathematical teaching, ontology, semiotics and cognitive theory.

Keywords: Records of semiotic representation, definite integral, geogebra and definite integral, applications of the definite integral, conversion and treatment.

I. INTRODUCCIÓN

Realidad problemática

Según Engels (1876, citado en Ríbnikov, 1974, p. 9) el objeto de estudio de la Matemática es “las relaciones cuantitativas y las formas espaciales del mundo real”. En este contexto, los objetos matemáticos se diferencian de los objetos utilizados en otros campos del conocimiento por la singularidad; de que para su aprehensión se carece de la vía directa de acceso, es decir no se los puede conocer por percepción directa o instrumentación, solo conceptualmente, valiéndose de ciertas representaciones semióticas (D’Amore, Fandiño, Iori y Matteuzzi, 2015).

La exclusividad de la existencia funcional, pero no material de los objetos matemáticos obliga la necesidad de representarlos externamente con signos que permitan expresarlos y reconocerlos (Pecharromán, 2014). Por tanto, el estudio de los objetos matemáticos, por su ontología, es de naturaleza semiótica y la cognición juega un papel fundamental en su aprendizaje.

Según Duval, aprender matemática exige que se coordinen como mínimo dos registros de representación (Damisa y Ponzetti, 2015). Además, los procesos matemáticos solo pueden ser realizados utilizando un sistema semiótico de representación (Martínez y Hernández, 2016).

Son conocidas las múltiples dificultades, que tienen los estudiantes, para aprender matemática en todas las latitudes del mundo, en particular en Perú, donde los índices de reprobación en los cursos de cálculo invitan hacer un acto reflexivo del proceso de enseñanza-aprendizaje, las estrategias didácticas y sobre todo de los recursos con que se cuentan, para la mediación docente de la actividad matemática. Hay una creencia habitual que el matemático de formación está apto, como tal, para ejercer la docencia en matemática, lo cual puede no ser necesariamente siempre cierto. Considerando que en el Perú la actividad laboral del matemático termina en la gran mayoría de los casos inevitablemente en la docencia y que la mediación docente requiere conocimientos de pedagogía y didáctica de la matemática, este trabajo se constituye en una necesaria contribución a la mejora del ejercicio profesional del matemático como docente en su búsqueda de generar aprendizajes significativos en estudiantes de cálculo integral y

conocer las dificultades que se presentan en este proceso. En este contexto, Duval expuso una de estas dificultades; en su famosa paradoja en la cual manifiesta que casi inevitablemente un sujeto, en fase de aprendizaje, puede confundir el objeto matemático que está tratando de construir cognitivamente con su representación semiótica (D'Amore, Fandiño, Iori y Mateuzzi, 2015, p. 180) y que tal confusión acarrea consigo un efecto de pérdida de la comprensión (Penalva y Torregrosa, 2001). Por otro lado, cabe preguntarse ¿cómo se puede lograr dominar los tratamientos matemáticos si no se adquirió previamente un aprendizaje conceptual de los objetos matemáticos? Duval expone las bases de la apropiación conceptual de un objeto matemático, señalando dos de sus características fuertes: usar por lo menos dos registros de representación semiótica y concebir y desarrollar nuevos sistemas semióticos (Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen, Gorrochátegui, 2012, p. 32).

Nardin et al. (2012), estudia los registros de representación semiótica para la integral definida en el enfoque de primitiva de una función. Lee y Martínez (2014) estudian los registros de representación semiótica para la integral definida en el cálculo multivariable. Ely (2017) da las pautas sobre los modos de interpretación de la notación (registro de representación semiótica) del cálculo que respaldan el modelado e interpretación del contexto, en las aplicaciones. Flores (2015), en su libro estudia la educación matemática en Perú evidencia las publicaciones relacionadas con el uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de diversos temas matemáticos, y menciona que el grupo de investigadores y estudiantes de la maestría en enseñanza de las matemáticas de la PUC de Perú e investigadores del grupo *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática* PEA-MAT de la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo-PUC-SP se propusieron trabajar en conjunto y estudiar temas relacionados con el aprendizaje de conceptos geométricos y algebraicos, tomando como referencia teórica la teoría de registros de representación semiótica, pero no menciona la producción de trabajos sobre registros de representación semiótica relacionados con la integral definida.

En este trabajo, y dada la relevancia de la comprensión conceptual de la integral definida en el ámbito del análisis matemático y el manejo de sus aplicaciones en problemas de ingeniería, se proponen sistemas semióticos que faciliten su aprendizaje y el dominio de sus aplicaciones, caracterizándolos en el marco de la teoría de Duval que indica como

un sistema semiótico puede tornarse en un registro de representación al admitir tres actividades cognoscitivas relacionadas con la semiosis: **Identifica** al objeto matemático (*representación*), **puede ser transformada al interno** del registro en el cual fue formulada (*tratamiento*) y **puede ser transformada en otra representación de otro registro** (*conversión*), conservando todo o parte del significado de la representación de partida (Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochátegui, 2012, p. 32).

Usar y comprender las representaciones semióticas de objetos matemáticos, por parte de los estudiantes, puede conllevar a limitaciones que se reflejen en que puedan tener los siguientes problemas: con frecuencia no logren comprender su naturaleza comunicativa y figurada, aunque realicen el análisis de varias representaciones, terminen focalizándose en una de ellas (la más probable sería aquella que les resulte más familiar y real) y en las características superficiales de la misma (no en aquellas que son esenciales conceptualmente) y cuando utilicen diferentes representaciones les resulte difícil coordinarlas e integrarlas y solo consigan realizar conexiones entre ellas cuando resuelvan problemas (García y Perales, 2006, citado en Hernández, Cervantes, Ordoñez y García, 2017).

Caracterizamos nuestro modelo de representación semiótica, a fin de conseguir cuatro ventajas, en el proceso de aprehensión de la integral definida y sus aplicaciones (Hernández, Cervantes, Ordoñez y García, 2017): lograr una comprensión que produzca los efectos esperados y sea integradora, centrando el aprendizaje en la *conversión* de las representaciones y en la coordinación de los diferentes tipos de registros semióticos; extraer conocimiento nuevo de los objetos matemáticos representados, mediante las transformaciones de ciertas representaciones en otras; configurar los conceptos, en su completa extensión y profundidad, mediante el énfasis de sus características y propiedades en cada registro de representación, y atender las peculiaridades de aprendizaje de cada estudiante, presentando los objetos matemáticos por mediación de varias representaciones.

Las ventajas del modelo que se propone, es que parte de la concepción del cálculo integral como análisis matemático por infinitesimales (la integral de Riemann) (Larson y Edwards, 2011), (Stewart, 2018), presenta como componente técnico una praxeología intra y extra matemática (sistema de prácticas) desde donde emergen los objetos matemáticos que se representan movilizandolos diversos registros de representación

semiótica para no confundir objeto representante de objeto representado, logrando transformaciones de conversión y tratamiento, la coordinación entre la diversidad de registros (que es condición esencial para cualquier aprendizaje de base) (Duval, 1993, Trad. MMoretti, 2012, p. 270) y evitando los conflictos semióticos que puedan presentarse en el aprendizaje con el apoyo del software dinámico, interactivo y gratuito GeoGebra (Gruszycki, A., Oteiza, Mara, Gruszycki, L. y Ballés, p. 2173), (López, F., Nieto, Antolín y López, P, 2013, p. 65). Este modelo es una alternativa para generar aprendizajes significativos de la integral definida y sus aplicaciones en el sentido que contenga los registros semióticos correspondientes a los saberes previos, con los cuales interactuarán los registros que representen a los nuevos conocimientos sobre integral definida y sus aplicaciones, a fin de producir cambios en la estructura cognitiva del estudiante (Ausubel, citado en de Carvalho y Schirlo, 2014).

En este trabajo alcanzamos nuestro objetivo, caracterizando los registros de representación semiótica, en juego, en la resolución de los ejercicios 5 y 20 de la práctica, fundamentándolos teóricamente, y estructurando un modelo para el aprendizaje de la integral definida que puede generar aprendizajes significativos en estudiantes de ingeniería.

Sobre las características que deben presentar los registros semióticos que proponemos para la representación de los objetos matemáticos involucrados en la actividad matemática con la integral definida y sus aplicaciones, manifestamos expresamente que los usamos solo como representaciones semióticas particulares de estos objetos, que no son los objetos en sí y tampoco son unívocos con ellos y que están orientados a la construcción del conocimiento matemático a través de tres operaciones básicas: **representar** los objetos mediante un registro determinado, **tratar** las representaciones al interno de un mismo registro y **realizar conversiones**, de las mismas, de un registro dado a otro, de acuerdo con las tres razones que da D' Amore: La conversión colisiona con manifestaciones de no congruencia, que constituyen el muro más invariable que se observa en la aprehensión de objetos matemáticos, la conversión permite fijar con claridad los medios que el estudiante utiliza para procesar la información, lo que permite observar y experimentar de manera precisa y sutil y la conversión es anticipada por la coordinación, de por lo menos dos registros de representación iniciados y que dan inicio a la “conceptualización” (D'Amore, 2011).

Nuestro abordaje sobre los registros de representación del objeto matemático integral definida y sus aplicaciones a la ingeniería es esencial, pero no únicamente, cognitivo y lo realizamos desde la perspectiva del enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática propuesto por Godino, en el cual, mejora la noción débil que considera como objeto matemático a todo ente o elemento referido o hablado, real o ficticio o de otro tipo que tome parte, de alguna manera, en la actividad matemática; por una “teoría fuerte”, como lo llama, evidenciando su postura ontológica al considerar el objeto matemático como una metáfora que consiste en llevar una de las peculiaridades de los entes físicos a la matemática, aceptando la factibilidad de distinguirlo de otros entes. De acuerdo con lo anterior, todo lo que se pueda “individualizar” en matemática puede considerarse como objeto; por ejemplo: conceptos, propiedades, representaciones, procedimientos, símbolos, etc. (Godino y Font, 2002, p. 2). Esta abordaje representa un hecho de suma importancia para la profesión del docente en matemática, dado que permite encuadrar el conocimiento matemático en un contexto más amplio, desde el cual científicamente se percibe con mayor claridad y fundamento los problemas de aprendizaje de la matemática y sus correspondientes soluciones. Para la sociedad, este trabajo apertura la posibilidad de generar un mayor interés por una matemática que pueda ser aprendida conceptualmente desde sus aplicaciones y evitando conflictos semióticos de aprendizaje gracias a la manipulación de herramientas tecnológicas y tal vez esto contribuya a un mejor aprendizaje y a una disminución de la deserción o reprobación de los cursos de cálculo integral por parte de los estudiantes de ingeniería.

Ahora bien, los objetos matemáticos existen debido a que son o están representando una funcionalidad organizativa o interpretativa, en un contexto dado, una funcionalidad que se torna objeto. Los objetos matemáticos son entes que cumplen algunas determinadas relaciones, las cuales determinan un estado de las cosas y este estado se constituye en el objeto, como objeto estado. Se puede considerar, entonces, al objeto matemático como un estado de relaciones. Cuando el ser humano percibe un contexto y su dinámica y su razón busca organizar y descifrar tal contexto advertido sensorialmente, se crean los objetos matemáticos para utilizarlos como medios de ordenar los fenómenos del mundo. Generalmente el contexto provee el conocimiento precedente y el conocimiento del contexto conlleva hacia el descubrimiento del objeto. La percepción del contexto crea la necesidad de representar determinados atributos y acciones organizativas o interpretativas del mismo. Los objetos matemáticos se conciben a partir de la

representación de funciones organizativas o interpretativas del contexto y, estos, son o representan una función o funcionalidad encargada de organizar o interpretar el contexto; tal función que desempeñan los objetos matemáticos justifica su existencia. Por tanto, la razón de existencia de los objetos matemáticos deviene de la función que desempeñan al organizar o interpretar el contexto, que al mismo tiempo representan. Esta génesis, junto con su causalidad, se relaciona con la naturaleza de los objetos matemáticos. La existencia de los objetos matemáticos es real no material, no es posible descubrirlos por experiencias físicas, sensitivas o intuitivas inmediatas, sino a través de la razón, solo cognitivamente; sin embargo, el hecho que sean producto de la razón, pues son percibidos por ella, les otorga la condición de ser reales no materiales. Al abstraerse una cualidad del contexto, esta se torna en objeto matemático, el cual representa un elemento interpretativo del contexto. Se puede ilustrar lo anterior con el hecho con que se interpreta y simplifica la representación del aspecto físico del orbe, que motivó la conceptualización de ciertos atributos de ese contexto relacionados a formas, cardinalidad, etc., de los cuales surgió una diversidad de objetos matemáticos como formas geométricas, área, números, etc. En otra ocurrencia, el objeto matemático es acción o procedimiento que organiza o interpreta el contexto. Como ilustración se puede mencionar a los *conjuntos* que cumplen la función de clasificar o suplen una clasificación, la *integral* suple una suma, etc. Los operadores, generalmente, representan o son por si mismos una acción que se manifiesta cuando se vinculan a los objetos con los que actúan. Al percibir en el contexto, atributos como forma, masa, color o rugosidad; al llevarlos a la matemática, los objetos matemáticos (que los representan) deben hacer posible una disposición ordenada o interpretativa que no sea, solamente clasificatoria o distintiva, sino también estructural e indispensable, sin que impida la necesidad de precisar la funcionalidad que representan los objetos matemáticos para realizar selectividad excluyente o de reconocimiento de objetos. Para ciertos casos es necesario una mejor caracterización de la naturaleza o funcionalidad del objeto matemático, necesidad manifiesta a partir de atributos propios del objeto como propiedades, conexiones internas y conexiones con otros objetos. En coherencia con la génesis de los objetos matemáticos, estos atributos pueden representar nuevos objetos matemáticos. Parece que la razón, cuando interpreta u organiza los contextos (actividad que se puede interpretar como descubrimiento de los objetos matemáticos), se conduce por: buscar la regularidad, simplicidad, generalidad, polivalencia e inclusive la belleza,

como se muestra en la presencia y uso del número phi o llamado también número áureo y cuyas proporciones se manifiestan en objetos matemáticos y en el contexto del mundo sensible (Pecharromán, 2013).

De la misma manera como el objeto matemático es o representa una funcionalidad en un determinado contexto, le es imprescindible la existencia de un signo que manifieste su existencia y lo represente. La creación de un objeto matemático ocurre cuando se le asocia uno o varios signos junto con las causas de tal asociación. La representación más inmediata del objeto matemático es creada a partir del contexto al que refiere como vehículo de expresión de la funcionalidad que suple y, de sus propiedades. Al descubrirse, en el contexto, la función organizadora (que está representando) el objeto matemático; la representación se desenvuelve a partir de los signos que participan en la configuración de este contexto. Es decir el acto creativo de la representación, lo dirige, esencialmente, la función organizativa que quiere manifestarse y se subordina a la naturaleza del contexto donde el objeto matemático fue descubierto y también del conocimiento que se tiene de tal contexto. En cualquier caso, solo hay sentido en el desarrollo y construcción de la representación cuando se observa, desde un contexto, la funcionalidad de un objeto matemático. Del mismo modo, usar una representación para manifestar un objeto matemático, solo adquiere sentido dentro de un contexto del cual emerja o en el cual, la presencia de su representación tenga coherencia con este, principalmente cuando tal representación puede ser utilizada para suplir objetos distintos y la identificación de uno u otros dependa de la ubicación que tenga la representación en ese contexto. La naturaleza o la dinámica del contexto. El contexto que da la posibilidad de existencia y uso del objeto más su representación, subordinan la expresión del objeto matemático. Los objetos matemáticos deben aprenderse desde representaciones que manifiesten la función que representan y a partir de estas alcanzar a las demás que también participan del aprendizaje del objeto matemático. Algunos objetos matemáticos determinan registros semióticos mediante los cuales son representados otros objetos matemáticos (Pecharromán, 2013).

Los objetos matemáticos, descubiertos o creados desde el menester práctico de interpretar, organizar y representar el mundo tangible se constituyen en los primeros objetos matemáticos creados, precursores del contexto matemático, cuyo desarrollo a posteriori es autónomo y en algunos casos impulsados por el mundo sensible. A lo largo

de toda su historia, la matemática ha sido una herramienta eficaz en la interpretación, organización y representación del mundo material e inversamente el mundo sensible se constituye en un contexto a partir del cual se crean los objetos matemáticos. También el desarrollo de la matemática está impulsado por la disposición de la razón por conocer las propiedades, relaciones y potencialidades de los objetos matemáticos creados. En conclusión, los objetos matemáticos brindan a la razón otro contexto para ser analizado, organizado o interpretado. La funcionalidad que representa un objeto matemático en un contexto de origen, y las características discriminatorias de la misma, definen el significado del objeto matemático. Cuando el objeto matemático se manifiesta en contextos distintos del de su origen, adquiere nuevas funcionalidades vinculadas con su uso y al contexto donde se usa. El significado institucional del objeto matemático está constituido por la funcionalidad que le da origen y lo representa, los aspectos que distinguen a la misma y el cúmulo de usos de esta funcionalidad en el conocimiento matemático. El significado institucional del objeto matemático se completa permanentemente por sus nuevos usos. Lo que indica que la determinación del significado institucional de un objeto matemático es abierta y potencialmente pueden surgir nuevos usos de objeto matemático y enriquecer el campo semántico de este. El desenvolvimiento del significado de un objeto matemático, también, puede estar condicionado por el desarrollo propio del conocimiento matemático. La adquisición de una identidad propia del objeto matemático deviene de la funcionalidad que representa en el contexto que lo origina, tal funcionalidad se desenvuelve, a posteriori, en los contextos en los cuales se usa el objeto. De manera que, el acceso al significado, uso o funcionalidad inmediata, del objeto matemático, es influenciado por el contexto. Por ejemplo un punto puede ser el vértice (significado) de un cuadrado (contexto) o el centro (significado) de una circunferencia (contexto). (Pecharromán, 2013).

En matemática se crea y se descubre. Se entiende por descubrir a la percepción realizada por medio de la razón y la comprensión existente de una cualidad o acción organizativa o interpretativa del contexto. El acto creativo, se relaciona con la manifestación externa de la anterior funcionalidad como un objeto libre del contexto en el cual fue percibido. Por ejemplo, el objeto circunferencia surge para representar una determinada relación cuadrática entre dos magnitudes variables. El objeto matemático número natural se crea como objeto matemático, después que se descubre la posibilidad de representar la cantidad, justo para representar esta funcionalidad. El acto de percibir cualidades o

acciones que permitan ordenar o interpretar contextos gesta objetos matemáticos y el acto de analizar estos objetos lleva a descubrir propiedades, métodos o procesos asociados, vínculos entre objetos, de lo cual pueden emerger nuevos objetos matemáticos. De manera general, se define el concepto (punto, recta, derivada integral etcétera) mediante los aspectos que permiten distinguir o discriminar en la clase de objetos que está siendo representada. Se puede considerar al objeto en particular como ejemplo del concepto y que se puede definir a través de él. El desenvolvimiento del conocimiento matemático exige mudanza o desenvolvimiento de la definición de los objetos matemáticos. Percibir la funcionalidad que representa el objeto en contextos diferentes del cual se originó puede exigir cambiar o desarrollar la definición de los objetos matemáticos. Objetos distintos pueden originarse de una misma funcionalidad dependiendo del contexto desde donde se perciba y de las propiedades y relaciones que se apropie la funcionalidad de ese contexto (integral definida, curva, etcétera). Subordinado al contexto a partir del cual se despliega su definición, el objeto matemático puede poseer varias definiciones, por ejemplo para la integral definida existen las definiciones de Riemann, Darboux, etcétera. La funcionalidad representada por el objeto matemático (medida del área de una región plana, etcétera) puede interpretarse desde diversos contextos de aprehensión y expresión que dan lugar a diversas definiciones como se manifiesta con la integral definida. El entendimiento de un objeto matemático equivale a la percepción de la funcionalidad que está representando este objeto y a la expresión de tal funcionalidad en un contexto. Desconsiderando aquellas experiencias mediante las cuales un individuo pueda percibir determinados objetos matemáticos en el contexto del mundo sensible, el aprendizaje de los objetos matemáticos tiene necesariamente como punto de partida sus representaciones. El objeto matemático se expresa mediante sus representaciones, que son el medio para llegar a percibir la funcionalidad del objeto. Debido a la poca especificidad que, generalmente, posee el simbolismo que constituyen estas representaciones hace necesario considerar el contexto (medio físico, objeto matemático, registro semiótico, etcétera) como manera que permite observar la funcionalidad que está representando el objeto y que por ende permita la representación adecuada manifieste el objeto. Cuando el individuo tiene experiencia con las representaciones de un objeto, desarrolla un significado personal de este objeto. Como este aprendizaje se limita al tratamiento de sus representaciones, se torna incompleto. Se llega al aprendizaje y a la comprensión cuando se logra

independizar el objeto de sus representaciones y de sus usos particulares y, este se percibe como funcionalidad. En el proceso de aprendizaje, el aprendiz se capacita para requerir a la representación más adecuada y a efectuar el reconocimiento del objeto en un contexto o situación dados. Es imprescindible que la funcionalidad en lugar de ligarse a un signo, se ligue al objeto, para que cuando una representación sea signo de diferentes objetos, para que cuando la misma representación sea signo de diferentes objetos no represente problemas para el aprendizaje y la comunicación. Generalmente, lo que determina a un objeto aludido por un signo es la funcionalidad que se asocie al signo mediante su uso en un contexto dado (significado) (Pecharromán, 2014).

La creación del objeto matemático se revela cuando este queda estructurado por aspectos de representación y significado. El primer aspecto se ocupa de la expresión y uso del objeto, el segundo cuida de la interpretación del objeto. Estos aspectos se desenvuelven a partir de la funcionalidad que está representando el objeto. El desenvolvimiento del significado del objeto matemático está determinado por el uso del objeto, en actividades organizativas o interpretativas de ciertas situaciones. A partir de la interpretación u organización que realiza un objeto del contexto, debe ser reconocido como atributo o acción en este contexto. Teniendo el significado personal de un objeto se elaboran correspondientes representaciones internas o mentales de este objeto. Ser usado funcionalmente un objeto matemático permite o guía la aprehensión racional de la funcionalidad que representa este objeto debido a que está regido por esta. Trátase de reconocer que el objeto matemático es funcionalidad o función organizativa o interpretativa, para lo cual debe destacarse las siguientes intervenciones docentes: para reconocer el objeto matemático por sus íconos, se necesita, por un lado, una descripción verbal orientadora de la interpretación que se haga de sus íconos en los registros semióticos y que permita el reconocimiento del objeto por medio de ellos. De otra parte, es menester brindar ejemplos particulares mediante los cuales se manifieste el objeto y que relacionen al objeto con los saberes previos del sujeto cognoscente. Tales ejemplos se erigen en contextos o registros semióticos notables para el sujeto, y esto favorece la percepción del objeto matemático. (Pecharromán, 2014).

Las transformaciones de representaciones en otras transformaciones semióticas se encuentran en el núcleo dinámico del quehacer matemático y estas pueden ser diversas y complejas al punto de comprometer el aprendizaje matemático de los estudiantes; en

el estudio de esta complejidad hay que tener en cuenta que las representaciones semióticas de los objetos matemáticos deben analizarse desde su funcionalidad representacional propia del registro donde son producidas. En matemática, el conocer los objetos y los conceptos solo comienza cuando el estudiante moviliza y coordina espontáneamente dos registros de representación de un mismo objeto. Si se quiere comprender, en matemática, se tiene que diferenciar el objeto de su representación. Debido a que la accesibilidad a los objetos matemáticos es únicamente por vía cognitiva, la diversidad de representaciones es completamente necesaria así como los tratamientos que se realicen sobre objetos matemáticos son dependientes directamente del sistema semiótico que se utilice. Esto nos indica el papel esencial que desempeñan las representaciones semióticas en la actividad matemática. Tradicionalmente se da más importancia a las representaciones mentales que a las semióticas, sin embargo, a diferencia de las representaciones mentales que cubren el conjunto de imágenes y por ende de las conceptualizaciones que puede tener un individuo con respecto a un objeto; las representaciones semióticas terminan siendo producciones que son formadas empleando signos que forman parte de un sistema de representaciones con desventajas de significación y funcionamiento. Las representaciones semióticas, además de ser necesarias para fines de comunicación matemática, son fundamentales para la actividad cognitiva del pensamiento, para lo cual desempeñan un papel esencial. El desarrollo de la ciencia está relacionado con el desarrollo de sistemas semióticos cada vez más específicos e independientes del lenguaje natural. Únicamente las representaciones semióticas posibilitan la realización de algunas funciones cognitivas básicas como las de tratamiento. La funcionalidad cognitiva del pensamiento humano se manifiesta inherente a la existencia de registros de representación. Se llama *semiosis* a la comprensión o producción de una representación semiótica y *noesis* a la comprensión conceptual de un objeto. Es necesario indicar que la noesis es inherente a la semiosis. Para evitar paradojas cognitivas en el pensamiento matemático y con ello el surgimiento de dificultades para aprenderlas se debe enseñar matemática considerando que no hay *noesis* sin *semiosis*. Es fundamental, en la actividad matemática, la capacidad de movilizar diversos registros de representación semiótica (figurales, gráficos, en lenguaje simbólico, en lenguaje natural, etcétera). Disponer de una diversidad de registros es, aparentemente, necesario para que no se confundan los objetos matemáticos con sus representaciones y puedan, también, ser identificados en cada una de sus

representaciones. Hay, entonces, un fuerte vínculo entre *semiosis* y *noesis* en la funcionalidad cognitiva del pensamiento que debe ser siempre evidenciado cuando se organiza la enseñanza matemática. Hay tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis. Solo dos de estas, la de formación y tratamiento se toman en cuenta en la enseñanza, mismo tratándose de la organización de secuencias de aprendizaje o de cuestionarios de validación. La conversión, tercera actividad cognitiva del pensamiento, juega un papel esencial en la noesis y en general en la comprensión. En el aprendizaje, la conversión es fundamental para la conceptualización y para percibir esto, hay que examinar la diversidad de registros de representación que incluye. Comparando la funcionalidad del pensamiento humano en relación con la inteligencia animal o artificial, la diferencia, con la inteligencia animal, no está en disponer de un sistema semiótico para comunicarse (una lengua), sino más bien en disponer de muchos sistemas de representación, como lenguaje e imagen gráfica (dibujo, pintura, ...). Y con respecto a la inteligencia artificial, la dificultad de superar la rigidez funcional que evita la especialización del modo de representación reducido a un solo sistema semiótico: la expresión booleana. El conocimiento progresa debido a se crean o desarrollan nuevos y peculiares sistemas semióticos que cohabitan con los anteriores como el sistema de la lengua natural. Considerando que el pensamiento humano funciona movilizándolo múltiples registros, la necesidad de crearlos o desarrollarlos pueden orientarse por: los costos de tratamiento, las limitaciones de representatividad específicas de cada registro y en la necesidad de una discriminación entre representante y representado. Los aspectos anteriores no se excluyen, pero se sitúan en niveles diferentes de descripción de la actividad cognitiva. Los costos de tratamiento se basan en una condición descriptiva superficial referida al funcionamiento de cada uno de los registros tal como son en el tratamiento de las representaciones. Las limitaciones de representatividad de cada registro (algo más semiótico) suponen una comparación entre las diferentes maneras de representar un mismo objeto, mediante un análisis de aspectos que son tomados en cuenta y aquellos que no lo son, en cada uno de los registros. En cuanto a la discriminación entre representante y representado supone un abordaje desarrollista de la actividad cognitiva, en materias en las cuales es fundamental disponer de una multiplicidad de registros. Tal discriminación involucra que en el estudio de las adquisiciones se reemplacen criterios de tratamiento y espontaneidad de las conversiones, poder de las transferencias en lugar de sencillos criterios de acierto (logro de una “buena respuesta”).

En cuanto a la economía de tratamiento, disponer de múltiples registros permite el cambio de uno de ellos y este cambio tiene por finalidad posibilitar realizar tratamientos más económicos y más potencializados que, en términos de costo de memoria, benefician los tratamientos de tipo cálculo y además se extiende a otros tratamientos como las representación más rápida de las relaciones entre objetos, por fórmulas literales más que por frases. La economía de tratamiento (perceptivo o algorítmico), en matemática, es más eficiente que en la lengua natural. La complementariedad de los registros tiene que ver con las posibilidades intrínsecas de cada sistema semiótico, de la selección de elementos significativos o informativos del contenido (objeto, concepto o situación) que se quiere representar y que determina la naturaleza del registro semiótico. La elección es hecha de acuerdo con las posibilidades y desventajas semióticas del registro que se elija. Son diferentes las posibilidades de representación que brindan un lenguaje, una figura o un diagrama. Esto lleva a entender que cualquier representación, cognitivamente, suple parcialmente aquello que representa, pues de un registro a otro no se encuentran los mismos aspectos del contenido de la situación que está siendo representada. De esta manera, las figuras y todas las representaciones analógicas, representan solamente estados, configuraciones o productos de operaciones, no acciones ni transformaciones. La representación de operaciones necesita de un registro con propiedades de una lengua: lenguaje natural o algebraico. Las figuras admiten representar todas las relaciones entre los componentes que forman parte del objeto o de la situación. Conceptualizar es una condición suficiente para la coordinación de registros de representación. Una idea sobre esto puede ser expresada como una primera hipótesis: escogido bien el registro de representación, las representaciones de este registro implican la aprehensión del contenido conceptual que se ha representado. La anterior hipótesis aparentemente queda justificada por la propia estructura de la representación como se la presenta habitualmente, en función de la significación de los signos. Como segunda hipótesis, se afirma que la comprensión integral de un concepto, se erige sobre la coordinación de por lo menos dos registros de representación, coordinación evidenciada por la rapidez y espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión (Duval, 1993).

Considerando los elementos teóricos anteriormente expuestos, presentamos un estudio de las representaciones semióticas de los objetos que emergen de la solución de los problemas 5 (área bajo una curva), 20 (aplicación de la integral definida al vaciado de

líquidos), 25 (b) (volumen de un sólido de revolución) y 27 (longitud de arco). De estas resoluciones se realizará un análisis de los registros de representación semiótica, movilizados en la resolución de los problemas 5 y 20 de la práctica (ver anexo III).

Resolución del problema 5

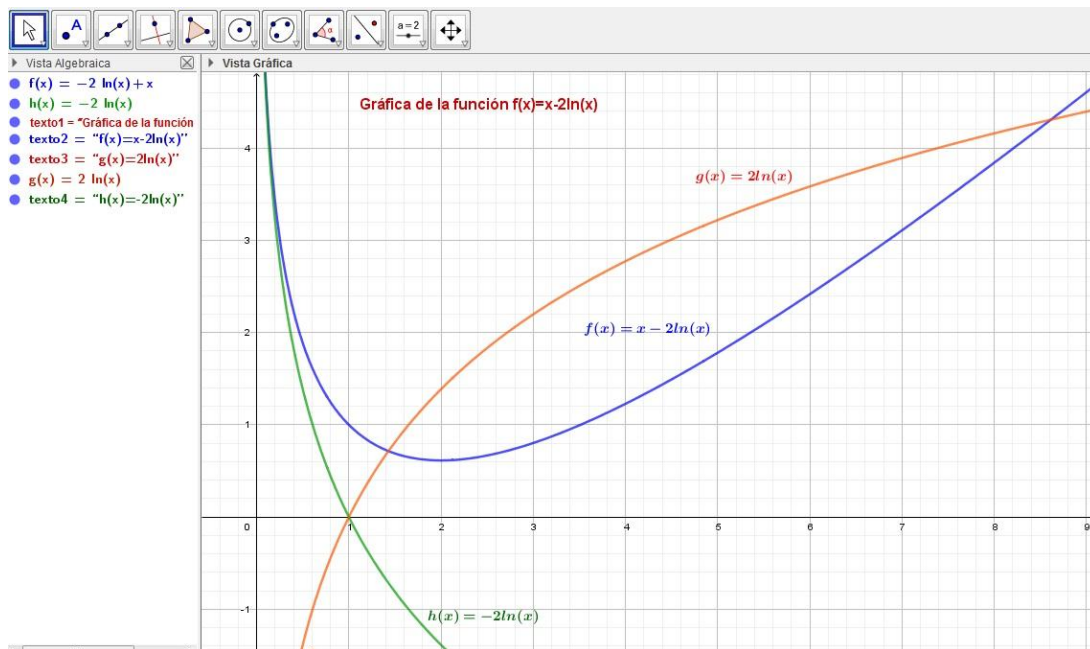
(a) Para dar solución al ejercicio 5, se salva la dificultad de graficar manualmente la función $f(x) = x - 2\ln(x)$ usando el software dinámico GeoGebra que trabaja simultáneamente con dos registros: algebraico y gráfico al mismo tiempo, con una vista en la que se puede realizar cálculo simbólico (CAS). La construcción de la gráfica es automática pero, en la mediación, el docente debe explicar los pasos para lograrla, a partir de la construcción de las gráficas de $g(x) = 2\ln(x)$ y $h(x) = -2\ln(x)$ para configurar $f(x) = x - 2\ln(x)$, observando la reflexión de $g(x) = 2\ln(x)$ en $h(x) = -2\ln(x)$ y la traslación variable en $f(x) = x - 2\ln(x)$; así como la determinación el dominio $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$ y rango de la función $\text{Rang}(f) = [f(2), +\infty)$, de los cuales se revelará la asíntota $x = 0$.

Llamaremos r^1 al registro semiótico en lenguaje natural, r^2 al registro semiótico gráfico, r^3 al registro semiótico en lenguaje algebraico, r^4 al registro semiótico numérico y r^5 al registro semiótico en lenguaje simbólico y $R_j^i(O_k)$ la representación j del objeto O_k en el registro semiótico r^i (Oviedo et al., 2012). Por tanto en el presente trabajo serán movilizados y coordinados hasta cinco registros de representación semiótica con sus conversiones y tratamientos visando la conceptualización de la integral definida (Duval, 1993, Trad. Moretti, 2012) y facilitar la resolución de situaciones problemáticas aplicadas a la ingeniería (Nardín, et al., 2012). De manera especial consideramos O_1^* el objeto situación problemática 5, componente de las prácticas consideradas.

Representación en registros algebraico y gráfico $R_1^3(O_1)$ y $R_1^2(O_1)$, objeto función

$$f(x) = x - 2\ln(x)$$

FIGURA 1 – CREACIÓN PROPIA

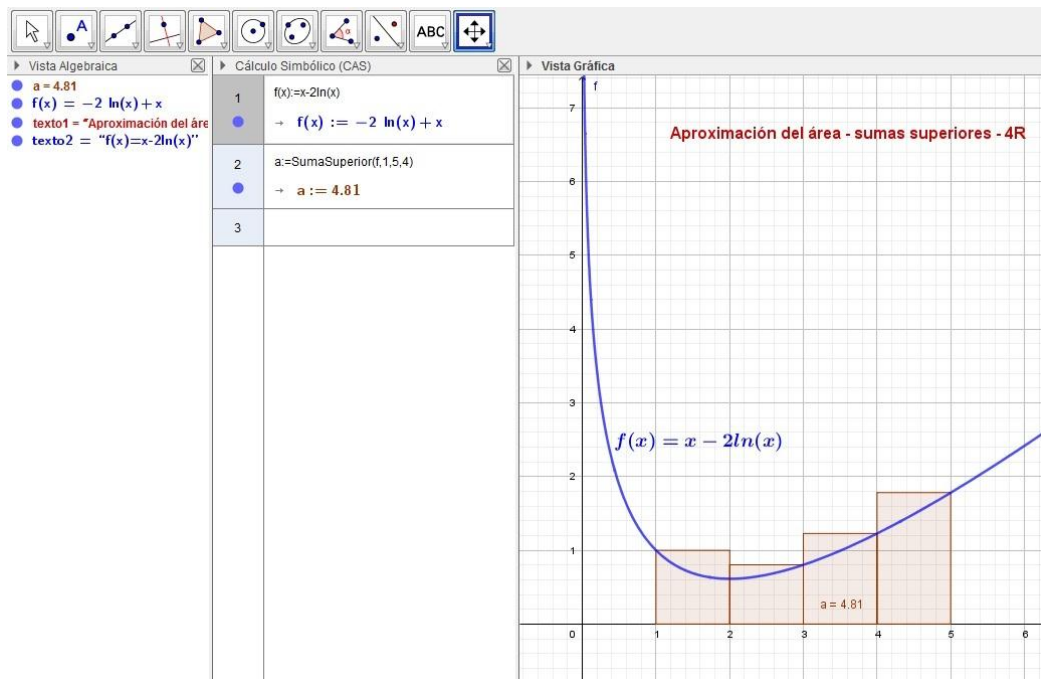


(b) Para calcular el área aproximada de la región S_I limitada por la región $f(x) = x - 2\ln(x)$, $x=1$, $x=5$ y $y=0$ cubriéndola con cuatro rectángulos y:

(i) **Por sumas superiores de Riemann**

Representación en registros algebraico y gráfico $R_2^3(O_1)$ y $R_2^2(O_2)$, O_2 es el objeto área de la región S_I por cobertura con cuatro rectángulos, resultantes de las sumas superiores de Riemann.

FIGURA 2 – CREACIÓN PROPIA



Representación en el registro numérico $R_1^4(O_2)$, O_2 área aproximada, por exceso de cuatro rectángulos que cubren la región S.

Calculando el área aproximada, por exceso, de la región S:

De la gráfica observamos que f es continua y acotada en $[1, 5]$

Sea $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$ y $x_4 = 5$, entonces $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es una partición de $[1, 5]$ y $\|P\| = \Delta_i x = x_i - x_{i-1} = \Delta x = 1$, entonces calculamos:

$$M_1(f) = \sup\{f(x) / x \in [x_0, x_1]\} = \sup\{x - 2 \ln(x) / x \in [1, 2]\} = \sup[f(1), f(2)] = \sup[1, 0.61] = 1 = f(1)$$

$$M_2(f) = \sup\{f(x) / x \in [x_1, x_2]\} = \sup\{x - 2 \ln(x) / x \in [2, 3]\} = \sup[f(2), f(3)] = \sup[0.61, 0.8] = 0.8 = f(3)$$

$$M_3(f) = \sup\{f(x) / x \in [x_2, x_3]\} = \sup\{x - 2 \ln(x) / x \in [3, 4]\} = \sup[f(3), f(4)] = \sup[0.8, 1.2] = 1.23 = f(4)$$

$$M_4(f) = \sup\{f(x) / x \in [x_3, x_4]\} = \sup\{x - 2 \ln(x) / x \in [4, 5]\} = \sup[f(4), f(5)] = \sup[1.23, 1.78] = 1.78 = f(5)$$

$\{h_i\}_{i=0}^4 = \{M_i(f)\}_{i=0}^4$ Son las alturas de los cuatro rectángulos considerados en la figura. El área aproximada bajo la curva f estará dada por:

$$A^{4R}(S_1) = M_1(f)(x_1 - x_0) + M_2(f)(x_2 - x_1) + M_3(f)(x_3 - x_2) + M_4(f)(x_4 - x_3) = \\ = 1(2 - 1) + 0.8(3 - 2) + 1.2(4 - 3) + 1.8(5 - 4) \approx 4.81$$

Registro en lenguaje simbólico $R_1^5(O_2)$ (Representación como suma expandida de la aproximación por exceso del área de la región S_I)

$$U(f, P) = M_1(f)\Delta_1x + M_2(f)\Delta_2x + M_3(f)\Delta_3x + M_4(f)\Delta_4x = 4.81$$

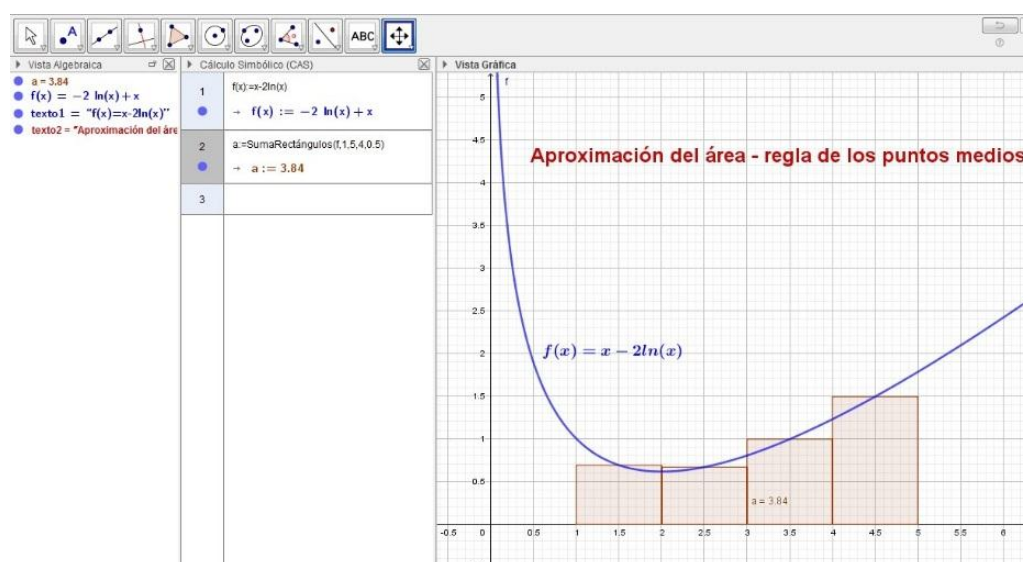
Registro en lenguaje simbólico $R_2^5(O_2)$ (Representación como suma con notación sigma de la aproximación por exceso del área de la región S_I)

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^4 M_i(f) \cdot \Delta_i x = 4.81$$

(ii) Cálculo del área aproximada de la región S_1 por la regla de los puntos medios.

Registro algebraico y gráfico $R_1^3(O_3)$ y $R_1^2(O_3)$, O_3 área aproximada de la región S por cobertura de cuatro rectángulos resultantes de la regla de los puntos medios.

FIGURA 3 – CREACIÓN PROPIA



Representación en registro numérico $R_1^4(O_3)$

El área aproximada de la región S_I por cobertura de cuatro rectángulos resultantes de la regla de los puntos medios:

De la gráfica observamos que f es continua y acotada en $[1, 5]$

Sea $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$ y $x_4 = 5$, entonces $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es una partición de $[1, 5]$ y $\|P\| = \Delta_i x = x_i - x_{i-1} = \Delta x = 1$, entonces:

Sean $\{h_i\}_{i=1}^4 = \left\{ f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \right\}_{i=1}^4$ las alturas de los cuatro rectángulos de la figura

$$h_1 = f\left(\frac{x_1 + x_0}{2}\right) = f\left(\frac{2+1}{2}\right) = f(1.5) = 1.5 - 2\ln(1.5) = 0.69$$

$$h_2 = f\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) = f\left(\frac{3+2}{2}\right) = f(2.5) = 2.5 - 2\ln(2.5) = 0.67$$

$$h_3 = f\left(\frac{x_3 + x_2}{2}\right) = f\left(\frac{4+3}{2}\right) = f(3.5) = 3.5 - 2\ln(3.5) = 0.99$$

$$h_4 = f\left(\frac{x_4 + x_3}{2}\right) = f\left(\frac{5+4}{2}\right) = f(4.5) = 4.5 - 2\ln(4.5) = 1.49$$

El área aproximada bajo la curva f estará dada por:

$$S_4 = 0.69 \times 1 + 0.67 \times 1 + 0.99 \times 1 + 1.49 \times 1 = 3.84$$

Registro en lenguaje simbólico $R_1^5(O_3)$ (Representación como suma expandida de la aproximación al área de la región S_I por cuatro rectángulos resultantes de la regla de los puntos medios)

$$\begin{aligned} A(S_1) &= h_1 \Delta_1 x + h_2 \Delta_2 x + h_3 \Delta_3 x + h_4 \Delta_4 x \\ &= f\left(\frac{x_1 + x_0}{2}\right)(x_1 - x_0) + f\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)(x_2 - x_1) + f\left(\frac{x_3 + x_2}{2}\right)(x_3 - x_2) + \\ &\quad + f\left(\frac{x_4 + x_3}{2}\right)(x_4 - x_3) = 3.84 \end{aligned}$$

Registro simbólico $R_2^5(O_3)$ (como suma con notación sigma para la aproximación del área de la región S_I por cuatro rectángulos resultantes de la regla de los puntos medios)

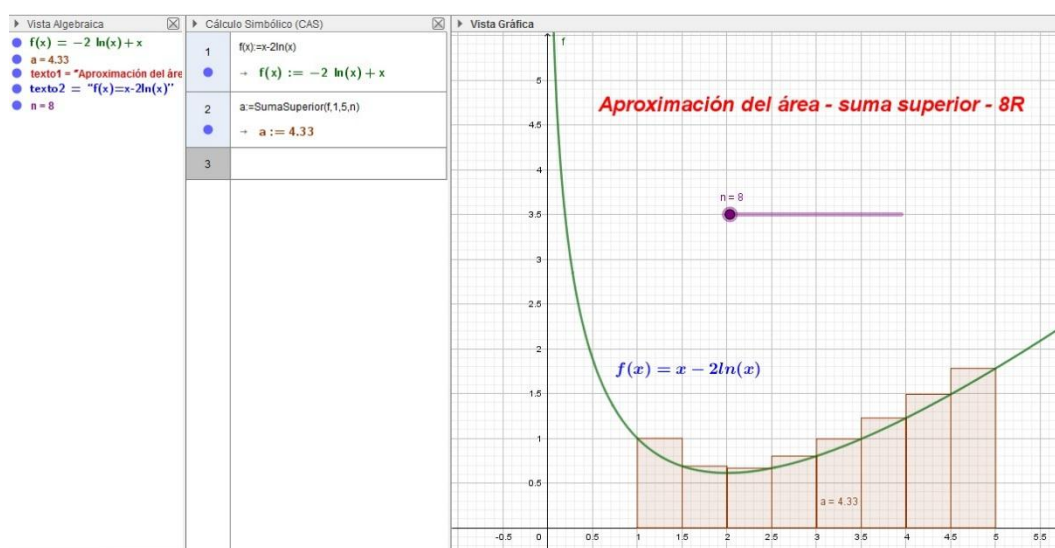
$$S_4 = \sum_{i=1}^4 f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^4 f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \cdot \Delta_i x = \sum_{i=1}^4 f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \cdot \Delta x$$

(c) Cálculo del área aproximada de la región S limitada por $f(x) = x - 2\ln(x)$, $x=1$, $x=5$ y $y=0$ usando ocho rectángulos y:

(i) **Por suma superior**

Representación en registro algebraico y gráfico $R_1^3(O_4)$ y $R_1^2(O_4)$, O_4 es el objeto área aproximada de la región S_1 por cobertura con 8 rectángulos resultantes de las sumas superiores de Riemann.

FIGURA 4 – CREACIÓN PROPIA



Representación en el registro numérico $R_1^4(O_4)$

El área aproximada de la región S_1 por cobertura con ocho rectángulos resultantes de las sumas superiores de Riemann.

De la gráfica observamos que f es continua y acotada en $[1, 5]$

Sea $x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5, x_4 = 3, x_5 = 3.5, x_6 = 4, x_7 = 4.5$ y $x_8 = 5$,

entonces $P = \{1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5\}$ es una partición de $[1, 5]$ y

$\|P\| = \Delta_i x = x_i - x_{i-1} = \Delta x = 0.5$, entonces:

$$\begin{aligned}
M_1(f) &= \sup \{ f(x) / x \in [x_0, x_1] \} = \sup \{ x - 2 \ln(x) / x \in [1, 1.5] \} = \sup [f(1), f(1.5)] = \\
&= \sup [1, 0.69] = 1 = f(1) \\
M_2(f) &= \sup \{ f(x) / x \in [x_1, x_2] \} = \sup \{ x - 2 \ln(x) / x \in [1.5, 2] \} = \sup [f(1.5), f(2)] = \\
&= \sup [0.69, 0.61] = 0.69 = f(1.5) \\
M_3(f) &= \sup \{ f(x) / x \in [x_2, x_3] \} = \sup \{ x - 2 \ln(x) / x \in [2, 2.5] \} = \sup [f(2), f(2.5)] = \\
&= \sup [0.61, 0.67] = 0.67 = f(2.5) \\
M_4(f) &= \sup \{ f(x) / x \in [x_3, x_4] \} = \sup \{ x - 2 \ln(x) / x \in [2.5, 3] \} = \sup [f(2.5), f(3)] = \\
&= \sup [0.67, 0.8] = 0.8 = f(3) \\
M_5(f) &= \sup \{ f(x) / x \in [x_4, x_5] \} = \sup \{ x - 2 \ln(x) / x \in [3, 3.5] \} = \sup [f(3), f(3.5)] = \\
&= \sup [0.8, 0.99] = 0.99 = f(3.5) \\
M_6(f) &= \sup \{ f(x) / x \in [x_5, x_6] \} = \sup \{ x - 2 \ln(x) / x \in [3.5, 4] \} = \sup [f(3.5), f(4)] = \\
&= \sup [0.99, 1.23] = 1.23 = f(4) \\
M_7(f) &= \sup \{ f(x) / x \in [x_6, x_7] \} = \sup \{ x - 2 \ln(x) / x \in [4, 4.5] \} = \sup [f(4), f(4.5)] = \\
&= \sup [1.23, 1.49] = 1.49 = f(4.5) \\
M_8(f) &= \sup \{ f(x) / x \in [x_7, x_8] \} = \sup \{ x - 2 \ln(x) / x \in [4.5, 5] \} = \sup [f(4.5), f(5)] = \\
&= \sup [1.49, 1.78] = 1.78 = f(5)
\end{aligned}$$

$\{h_i\}_{i=0}^8 = \{M_i(f)\}_{i=0}^8$ Son las alturas de los ocho rectángulos considerados en la figura. El área aproximada bajo la curva f estará dada por:

$$\begin{aligned}
S_8 &= M_1(f)(x_1 - x_0) + M_2(f)(x_2 - x_1) + M_3(f)(x_3 - x_2) + M_4(f)(x_4 - x_3) + \\
&\quad M_5(f)(x_5 - x_4) + M_6(f)(x_6 - x_5) + M_7(f)(x_7 - x_6) + M_8(f)(x_8 - x_7) \\
&= 1(1.5 - 1) + 0.69(2 - 1.5) + 0.67(2.5 - 2) + 0.8(3 - 2.5) + 0.99(3.5 - 3) + \\
&\quad + 1.23(4 - 3.5) + 1.49(4.5 - 4) + 1.78(5 - 4.5) \approx 4.33
\end{aligned}$$

Representación en registro simbólico $R_1^5(O_4)$ (como suma expandida de la aproximación por exceso del área de la región S_I por cobertura con ocho rectángulos)

$$\begin{aligned}
S_8 &= U(f, P) = M_1(f)\Delta_1x + M_2(f)\Delta_2x + M_3(f)\Delta_3x + M_4(f)\Delta_4x + \\
&\quad + M_5(f)\Delta_5x + M_6(f)\Delta_6x + M_7(f)\Delta_7x + M_8(f)\Delta_8x \approx 4.33
\end{aligned}$$

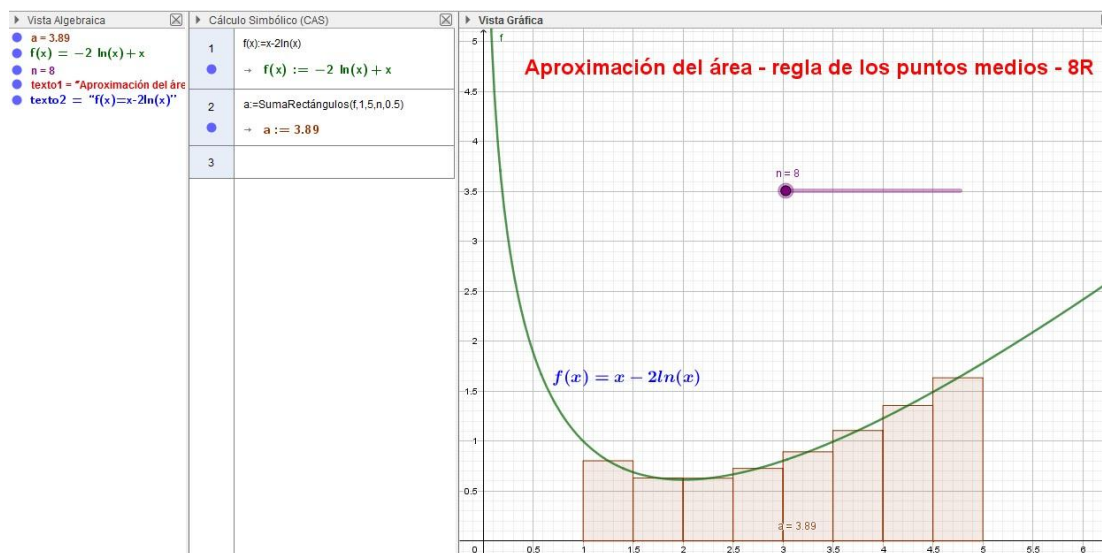
Representación en registro simbólico $R_2^5(O_4)$ (como suma con notación sigma de la aproximación por exceso del área de la región S_I por cobertura con ocho rectángulos)

$$S_1^{8R} = U(f, P) = \sum_{i=1}^8 M_i(f) \cdot \Delta_i x = 4.33$$

(iii) Por la regla de los puntos medios

Representación en registros algebraico y gráfico $R_1^3(O_5)$ y $R_1^2(O_5)$

FIGURA 5 – CREACIÓN PROPIA



Representación en registro numérico $R_1^4(O_5)$, O_5 es el área aproximada de S_I por cobertura con ocho rectángulos resultantes de la regla de los puntos medios.

Cálculo del área aproximada de la región S_I :

De la gráfica observamos que f es continua y acotada en $[1, 5]$

Sea $x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5, x_4 = 3, x_5 = 3.5, x_6 = 4, x_7 = 4.5$ y $x_8 = 5$,

entonces $P = \{1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5\}$ es una partición de $[1, 5]$ y

$\|P\| = \Delta_i x = x_i - x_{i-1} = \Delta x = 0.5$, entonces:

Sean $\{h_i\}_{i=1}^8 = \left\{ f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right\}_{i=1}^8$ las alturas de los ocho rectángulos de la figura

$$\begin{aligned}
h_1 &= f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = f\left(\frac{1+1.5}{2}\right) = f(1.25) = 1.25 - 2\ln(1.25) = 0.8 \\
h_2 &= f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f\left(\frac{1.5+2}{2}\right) = f(1.75) = 1.75 - 2\ln(1.75) = 0.63 \\
h_3 &= f\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) = f\left(\frac{2+2.5}{2}\right) = f(2.25) = 2.25 - 2\ln(2.25) = 0.63 \\
h_4 &= f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right) = f\left(\frac{2.5+3}{2}\right) = f(2.75) = 2.75 - 2\ln(2.75) = 0.73 \\
h_5 &= f\left(\frac{x_4 + x_5}{2}\right) = f\left(\frac{3+3.5}{2}\right) = f(3.25) = 3.25 - 2\ln(3.25) = 0.89 \\
h_6 &= f\left(\frac{x_5 + x_6}{2}\right) = f\left(\frac{3.5+4}{2}\right) = f(3.75) = 3.75 - 2\ln(3.75) = 1.11 \\
h_7 &= f\left(\frac{x_6 + x_7}{2}\right) = f\left(\frac{4+4.5}{2}\right) = f(4.25) = 4.25 - 2\ln(4.25) = 1.36 \\
h_8 &= f\left(\frac{x_7 + x_8}{2}\right) = f\left(\frac{4.5+5}{2}\right) = f(4.75) = 4.75 - 2\ln(4.75) = 1.63
\end{aligned}$$

El área aproximada bajo la curva f estará dada por:

$$S_1^{8R} = (0.8 + 0.63 + 0.63 + 0.73 + 0.89 + 1.11 + 1.36 + 1.63) \times 0.5 = 3.89$$

Representación en registro simbólico $R_1^5(O_5)$ (Representación como suma expandida del área aproximada de S_I por cobertura con ocho rectángulos resultantes de la regla de los puntos medios)

$$\begin{aligned}
S_8 &= h_1\Delta_1x + h_2\Delta_2x + h_3\Delta_3x + h_4\Delta_4x + h_5\Delta_5x + h_6\Delta_6x + h_7\Delta_7x + h_8\Delta_8x \\
&= f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)(x_1 - x_0) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)(x_2 - x_1) + f\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)(x_3 - x_2) + \\
&+ f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)(x_4 - x_3) + f\left(\frac{x_4 + x_5}{2}\right)(x_5 - x_4) + f\left(\frac{x_5 + x_6}{2}\right)(x_6 - x_5) + \\
&+ f\left(\frac{x_6 + x_7}{2}\right)(x_7 - x_6) + f\left(\frac{x_7 + x_8}{2}\right)(x_8 - x_7) = 3.89
\end{aligned}$$

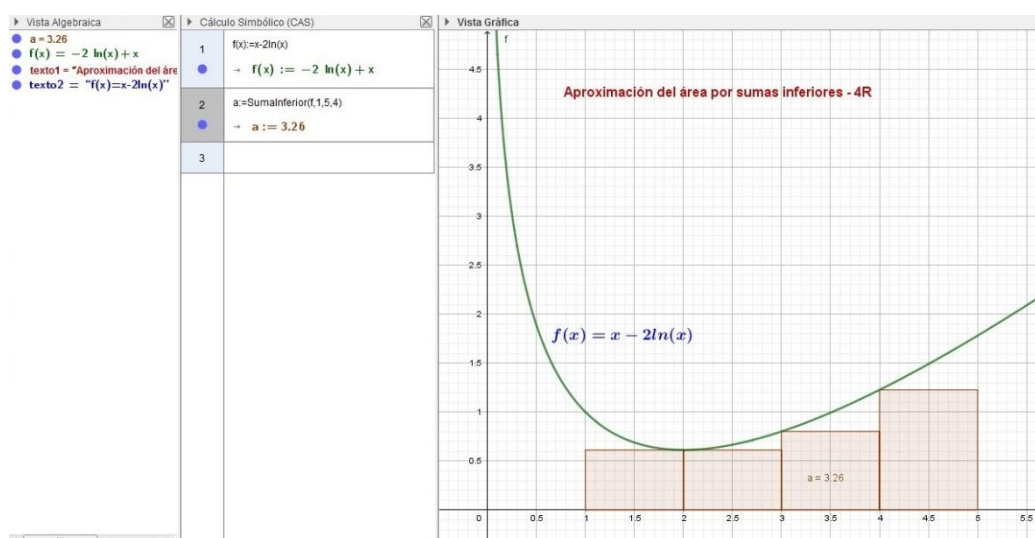
Representación en registro simbólico $R_2^5(O_5)$ (como suma con notación sigma del área aproximada de S_I por cobertura con ocho rectángulos resultantes de la regla de los puntos medios)

$$S_1^{8R} = \sum_{i=1}^8 f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^8 f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \cdot \Delta_i x = \sum_{i=1}^4 f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \cdot \Delta x$$

Con esto, quedaría respondidas las preguntas que plantea la situación problemática 5. Aún queda por complementar como se llega al área exacta. Antes daremos la visión de la aproximación del área, por sumas inferiores. Cuando se intenta cubrir el área con cuatro rectángulos

Representación en registros algebraico y gráfico $R_1^3(O_6)$ y $R_1^2(O_6)$, O_6 es el objeto área aproximada de S_I por cobertura con cuatro rectángulos resultantes de las sumas inferiores de Riemann.

FIGURA 6 – CREACIÓN PROPIA



Representación en registro numérico $R_1^4(O_6)$.

Cálculo del área aproximada de la región S_I por cobertura con cuatro rectángulos resultantes de las sumas inferiores de Riemann.

De la gráfica observamos que f es continua y acotada en $[1, 5]$

Sea $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$ y $x_4 = 5$, entonces $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es una partición de $[1, 5]$ y $\|P\| = \Delta_i x = x_i - x_{i-1} = \Delta x = 1$, entonces:

$$m_1(f) = \inf \{f(x) / x \in [x_0, x_1]\} = \inf \{x - 2\ln(x) / x \in [1, 2]\} = \inf [f(1), f(2)] = \\ = \inf [1, 0.61] = 0.614 = f(2)$$

$$m_2(f) = \inf \{f(x) / x \in [x_1, x_2]\} = \inf \{x - 2\ln(x) / x \in [2, 3]\} = \inf [f(2), f(3)] = \\ = \inf [0.61, 0.8] = 0.614 = f(2)$$

$$m_3(f) = \inf \{f(x) / x \in [x_2, x_3]\} = \inf \{x - 2\ln(x) / x \in [3, 4]\} = \inf [f(3), f(4)] = \\ = \inf [0.8, 1.23] = 0.803 = f(3)$$

$$m_4(f) = \inf \{f(x) / x \in [x_3, x_4]\} = \inf \{x - 2\ln(x) / x \in [4, 5]\} = \sup [f(4), f(5)] = \\ = \inf [1.23, 1.78] = 1.23 = f(4)$$

$\{h_i\}_{i=0}^4 = \{m_i(f)\}_{i=0}^4$ Son las alturas de los cuatro rectángulos considerados en la figura. El área aproximada bajo la curva f estará dada por:

$$S_4 = m_1(f)(x_1 - x_0) + m_2(f)(x_2 - x_1) + m_3(f)(x_3 - x_2) + m_4(f)(x_4 - x_3) = \\ = 0.614(2 - 1) + 0.614(3 - 2) + 0.803(4 - 3) + 1.23(5 - 4) \approx 3.26$$

Representación en registro simbólico $R_1^5(O_6)$ (Como suma expandida, del área aproximada de S_I por cobertura con cuatro rectángulos resultantes de las sumas inferiores de Riemann)

$$S_1^{4R} = L(f, P) = m_1(f)\Delta_1x + m_2(f)\Delta_2x + m_3(f)\Delta_3x + m_4(f)\Delta_4x = 3.26$$

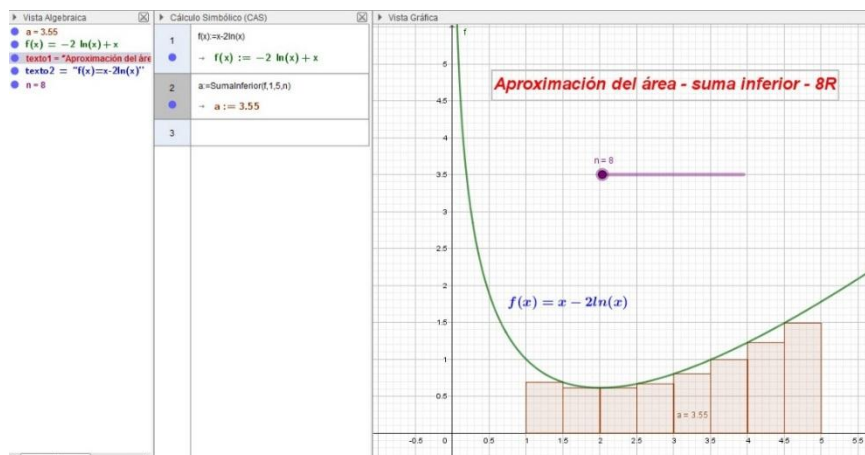
Representación en registro simbólico $R_2^5(O_6)$ (Como suma con notación sigma, del área aproximada de S_I por cobertura con cuatro rectángulos resultantes de las sumas inferiores de Riemann)

$$S_1^{4R} = L(f, P) = \sum_{i=1}^4 m_i(f) \cdot \Delta_i x = 3.26$$

Aproximación, por defecto, al área de S_I por cobertura con 8 rectángulos

Representación en registros algebraico y gráfico $R_1^3(O_7)$ y $R_1^2(O_7)$, O_7 es el objeto área aproximada a S_I por cobertura con ocho rectángulos, resultantes de las sumas inferiores de Riemann.

FIGURA 6 – CREACIÓN PROPIA



Representación en el registro numérico $R_1^4(O_7)$, O_7 es el área aproximada de S_I , por cobertura con ocho rectángulos resultantes de las sumas inferiores de Rieman.

Cálculo del área aproximada de la región S por cobertura con ocho rectángulos
De la gráfica observamos que f es continua y acotada en $[1, 5]$

Sea $x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5, x_4 = 3, x_5 = 3.5, x_6 = 4, x_7 = 4.5$ y $x_8 = 5$,
entonces $P = \{1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5\}$ es una partición de $[1, 5]$ y
 $\|P\| = \Delta_i x = x_i - x_{i-1} = \Delta x = 0.5$, entonces:

$$\begin{aligned}
m_1(f) &= \inf \{ f(x) / x \in [x_0, x_1] \} = \sup \{ x - 2 \ln(x) / x \in [1, 1.5] \} = \inf [f(1), f(1.5)] = \\
&= \inf [1, 0.69] = 0.69 = f(1.5) \\
m_2(f) &= \inf \{ f(x) / x \in [x_1, x_2] \} = \inf \{ x - 2 \ln(x) / x \in [1.5, 2] \} = \inf [f(1.5), f(2)] = \\
&= \inf [0.69, 0.61] = 0.61 = f(2) \\
m_3(f) &= \inf \{ f(x) / x \in [x_2, x_3] \} = \inf \{ x - 2 \ln(x) / x \in [2, 2.5] \} = \inf [f(2), f(2.5)] = \\
&= \inf [0.61, 0.67] = 0.61 = f(2) \\
m_4(f) &= \inf \{ f(x) / x \in [x_3, x_4] \} = \inf \{ x - 2 \ln(x) / x \in [2.5, 3] \} = \inf [f(2.5), f(3)] = \\
&= \inf [0.67, 0.8] = 0.67 = f(2.5) \\
m_5(f) &= \inf \{ f(x) / x \in [x_4, x_5] \} = \inf \{ x - 2 \ln(x) / x \in [3, 3.5] \} = \inf [f(3), f(3.5)] = \\
&= \sup [0.8, 0.99] = 0.8 = f(3) \\
m_6(f) &= \sup \{ f(x) / x \in [x_5, x_6] \} = \inf \{ x - 2 \ln(x) / x \in [3.5, 4] \} = \sup [f(3.5), f(4)] = \\
&= \inf [0.99, 1.23] = 0.99 = f(3.5) \\
m_7(f) &= \inf \{ f(x) / x \in [x_6, x_7] \} = \inf \{ x - 2 \ln(x) / x \in [4, 4.5] \} = \inf [f(4), f(4.5)] = \\
&= \inf [1.23, 1.49] = 1.23 = f(4) \\
m_8(f) &= \inf \{ f(x) / x \in [x_7, x_8] \} = \inf \{ x - 2 \ln(x) / x \in [4.5, 5] \} = \inf [f(4.5), f(5)] = \\
&= \inf [1.49, 1.78] = 1.49 = f(4.5)
\end{aligned}$$

$\{h_i\}_{i=0}^8 = \{m_i(f)\}_{i=0}^8$ Son las alturas de los ocho rectángulos considerados en la figura. El área aproximada bajo la curva f estará dada por:

$$\begin{aligned}
S_4 &= m_1(f)(x_1 - x_0) + m_2(f)(x_2 - x_1) + m_3(f)(x_3 - x_2) + m_4(f)(x_4 - x_3) + \\
&\quad m_5(f)(x_4 - x_5) + m_6(f)(x_6 - x_5) + m_7(f)(x_7 - x_6) + m_8(f)(x_8 - x_7) \\
&= 1(1.5 - 1) + 0.69(2 - 1.5) + 0.67(2.5 - 2) + 0.8(3 - 2.5) + 0.99(3.5 - 3) + \\
&\quad + 1.23(4 - 3.5) + 1.49(4.5 - 4) + 1.78(5 - 4.5) \approx 3.55
\end{aligned}$$

Representación en registro simbólico $R_1^5(O_7)$ (Representación como suma expandida, por defecto, de la aproximación al área de S , por cobertura con ocho rectángulos resultantes de las sumas inferiores de Riemann)

$$\begin{aligned}
S_8 &= L(f, P) = m_1(f)\Delta_1x + m_2(f)\Delta_2x + m_3(f)\Delta_3x + m_4(f)\Delta_4x + \\
&\quad + m_5(f)\Delta_5x + m_6(f)\Delta_6x + m_7(f)\Delta_7x + m_8(f)\Delta_8x \approx 3.55
\end{aligned}$$

Representación en registro simbólico $R_2^5(O_7)$ (como suma con notación sigma, por defecto, de la aproximación al área de S_I , por cobertura con ocho rectángulos resultantes de las sumas inferiores de Riemann)

$$S_8 = L(f, P) = \sum_{i=1}^8 m_i(f) \cdot \Delta_i x \approx 3.55$$

Cálculo del área exacta de S_I

Registro en lenguaje simbólico $R_1^5(O_8)$, O_8 es el objeto área exacta de S_I por cobertura con n infinitos rectángulos, resultantes del límite de las sumas inferiores de Riemann.

La aproximación al área de S_I se puede obtener por sumas de Riemann superiores, inferiores o por la regla de los puntos medios. En la situación problemática 5, para obtener el valor exacto del área de la región del plano S_I limitada por $f(x) = x - 2\ln(x)$, $y=0$, $x=1$ y $x=5$; sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ donde $x_0=1$ y $x_n=5$, por sumas inferiores una buena aproximación al área, se obtendría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S_1^{nR} &= L(f, P) = m_1 \Delta_1 x + m_2 \Delta_2 x + \dots + m_{i-1} \Delta_{i-1} x + m_i \Delta_i x \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i x \end{aligned} \quad n > 5000 \text{ (ggb)}$$

Donde $m_i = \inf\{f(x) / x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ son las alturas de los rectángulos que cubren

la región considerada y $\Delta_i x = x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}$ es la longitud de sus

bases, considerando $\|P\| = \Delta_i x = \Delta x = \frac{4}{n}$. A medida que el número de

rectángulos que cubren la región crece ($n \rightarrow \infty$), $\Delta x \rightarrow 0$ y el área de la región

pasa de aproximada a exacta cuando se toma el límite: $S_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ que

representa el área exacta de la región. Para el caso de la situación problemática 5, se tendría:

$$x_i = 1 + \frac{4i}{n}; f(x_i) = 1 + \frac{4i}{n} - 2\ln\left(1 + \frac{4i}{n}\right) \text{ y } \Delta_i x = \Delta x = \frac{4}{n}, \text{ entonces}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[1 + \frac{4i}{n} - 2 \ln \left(1 + \frac{4i}{n} \right) \right] \cdot \left(\frac{4}{n} \right) = 20 - 10 \ln(5) \quad \text{Que sería el valor}$$

numérico del área exacta de la región considerada (el límite fue calculado con Symbolab).

Ahora bien, esta área exacta se considera, también, por definición, como la integral definida de la función f en el intervalo $[1,5]$, según (Espinoza, 2012,

$$\text{p. 332)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta_i x = \int_1^5 f(x) dx = \int_1^5 (x - 2 \ln(x)) dx = 20 - 10 \ln(x) \approx 3.91$$

El valor exacto del área es $20 - 10 \ln(x)$ que aproximando a dos decimales resulta $3.91 u^2$.

Las representaciones anteriores nos permiten emular las definiciones como las

presenta Espinoza (2012). También, el símbolo $\int_a^b f(x) dx$ representa la

determinación de la primitiva $F(x)$ así como $F(b) - F(a)$ llamado segundo teorema fundamental del cálculo (Nardín, et al., 2012). Para el caso de la situación

problemática 5 de la práctica propuesta; obtener $\int_1^5 [x - 2 \ln(x)] dx$ manualmente,

requiere calcular la primitiva de $f(x) = x - 2 \ln(x)$, usando el método de integración por partes, para luego aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo como sigue:

$$I = \int_1^5 (x - 2 \ln(x)) dx = \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^5 - 2 \int_1^5 \ln(x) dx = \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^5 - 2J$$

Registro algebraico $R_1^3(O_9)$, O_9 es el objeto integral definida de f en $[1, 5]$, desde la perspectiva de la integral definida como cálculo de la primitiva de f y aplicación del segundo teorema fundamental del cálculo o fórmula de Newton-Leibitz (Lee, D. y Martínez, R., 2014).

Aplicando el método de integración por partes, para J , y el criterio ILATE (Espinoza, 2012) se tiene:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$J = uv \Big|_1^5 - \int_1^5 v du = \left(x \ln x \Big|_1^5 - 2 \left[\left(x \ln x \Big|_1^5 - \int_1^5 dx \right) \right] \right)$$

Aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo llamado también regla de Barrow o fórmula de Newton-Leibniz, se tiene:

$$I = \frac{25}{2} - \frac{1}{2} - 2(5 \ln 5 - 5 + 1) = 20 - 10 \ln 5$$

Que es el valor exacto del área la región S limitada por $f(x) = x - 2 \ln(x)$, $y=0$, $x=1$ y $x=5$.

A guisa de justificaciones correspondientes son importantes las siguientes definiciones, propiedades y teoremas.

Definición de la integral como límite de sumas

Definición 1: Criterio de integrabilidad de una función (Espinoza, 2012).

f es integrable en el intervalo $[a, b]$, si existe un número L , satisfaciendo la

condición: para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\left| \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta_i x - L \right| < \varepsilon$, para

cualquier partición P del intervalo $[a, b]$, donde $\|P\| < \delta$, esta definición se

representa por: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta_i x$

Definición 2: Integral definida en un intervalo cerrado (Espinoza, 2012).

Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la integral

definida de “a” hasta “b”, denotada por $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta_i x$ si este límite

existe.

En este trabajo se ha considerado el cálculo de la integral definida utilizando intervalos de igual longitud (en la partición). Es decir, asumiendo

$\Delta_i x = x_i - x_{i-1} = \Delta x$, $\forall x_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y donde $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Por

tanto, para el caso de la situación problemática 5, la definición de integral

definida queda como: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$.

Donde f , se requiere que sea continua y positiva en $[a, b]$.

Propiedades básicas de la integral definida (Espinoza, 2012)

Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$ y k una constante arbitraria, entonces:

$$\begin{aligned}
 1. \int_a^b kf(x) dx &= k \int_a^b f(x) dx \\
 2. \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\
 3. \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\
 4. \int_a^b f(x) dx &= -\int_b^a f(x) dx, \quad b > a \quad 5. \int_a^a f(x) dx = 0
 \end{aligned}$$

Teorema del valor medio para integrales (Espinoza, 2012, p. 352)

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe un número $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

Primer teorema fundamental del cálculo (derivadas de integrales)

(Espinoza, 2012, p. 361)

Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces la función F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b \text{ es derivable en } [a, b] \text{ y}$$

$$D_x F(x) = D_x \int_a^x f(t) dt = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Segundo teorema fundamental del cálculo (Fórmula de Newton-Leibnitz)

(Espinoza, 2012, p. 368)

Sea f una función continua en $[a, b]$ y F una función tal que

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b], \text{ entonces } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

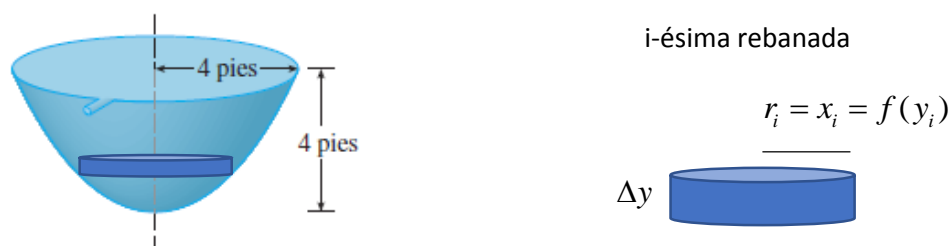
Las demostraciones de los tres teoremas anteriores, están bastante claras y entendibles en (Espinoza, 2012)

Resolución del problema 20 (Aplicación de la integral definida al vaciado de líquidos)

Trabajo Mecánico

(29 de 1, pg.467)

Un tanque lleno de agua tiene la forma de un paraboloide de revolución, como se ve en el **registro gráfico** $R_1^2(O_{10})$, O_{10} es el objeto trabajo mecánico que se aplica sobre el volumen de agua contenido en el recipiente paraboloide de la figura, para vaciarlo.



(a) Si su altura es de 4 pies y el radio en la parte superior es de 4 pies, encuentre el trabajo necesario para bombear el agua fuera del tanque.

(b) Después que se han realizado 4000 lb-pie de trabajo, ¿cuál es la profundidad del agua restante en el tanque?

La lectura del problema, junto con el esbozo de la gráfica nos permite organizar los datos en el Registro gráfico:

- a) **Registro en lenguaje simbólico** $R_2^5(O_{11})$, O_{11} es el objeto i-ésimo trabajo w_i necesario para desplazar el i-ésimo volumen de agua V_i , una de las n “rebanadas” de volúmenes de agua en que ha sido dividido el volumen total de agua contenido en el recipiente paraboloide, considerado en esta situación problemática.

Consideremos el i-ésimo volumen, de la i-ésima rebanada, a ser bombeada como un i-ésimo cilindro circular recto de altura infinitesimal Δy y radio de la base $r_i = f(y_i)$, entonces $V_i = \pi r_i^2 \Delta y = \pi f^2(y_i) \Delta y = \pi x_i^2 \Delta y = 4\pi y_i \Delta y$. La i-ésima masa de esta rebanada será $m_i = \rho V_i = 4\pi \rho \cdot y_i \Delta y$, la i-ésima fuerza que la desplaza $F_i = m_i \cdot g = 4\pi \rho g \cdot y_i \Delta y = 4\pi \gamma \cdot y_i \Delta y$, y el i-ésimo trabajo necesario para bombear m_i será $w_i = F_i \cdot d_i = 4\pi \gamma \cdot y_i (4 - y_i) \Delta y$, γ es el peso específico del fluido (en caso del

agua 62.43 lb/ft³). Una aproximación, por suma extensiva, al trabajo para bombear toda el agua del recipiente al exterior puede representarse por $R_1^5(O_{12})$:

$$w \approx w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_{n-1} + w_n$$

Usando la notación sigma, la aproximación al trabajo para bombear toda el agua del recipiente al exterior puede representarse por $R_2^5(O_{12})$:

$$w \approx \sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot d_i = \sum_{i=1}^n 4\pi\gamma \cdot y_i (4 - y_i) \Delta y.$$

Para obtener el trabajo exacto, necesario para bombear toda el agua del recipiente, hacia el exterior, las alturas de los i-ésimos cilindros que cubran el volumen del sólido de revolución, deben encajar exactamente en sus “paredes interiores”, para esto es necesario que el número de i-ésimos cilindros tienda al infinito ($n \rightarrow \infty$), para que sus alturas ($\Delta y \rightarrow 0$) encajen perfectamente en las paredes internas del paraboloide, puede ser representado por $R_2^5(O_{10})$ (Lee, D. y Martínez, R., 2014):

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n w_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_i \cdot d_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 4\pi\gamma \cdot y_i (4 - y_i) \Delta y$$

La representación anterior se asume, también, como $R_3^5(O_{10})$:

$$W = 4\pi\gamma \int_0^4 y(4 - y) \cdot dy \text{ (Espinoza, 2012, p. 331), que representa el trabajo exacto que se}$$

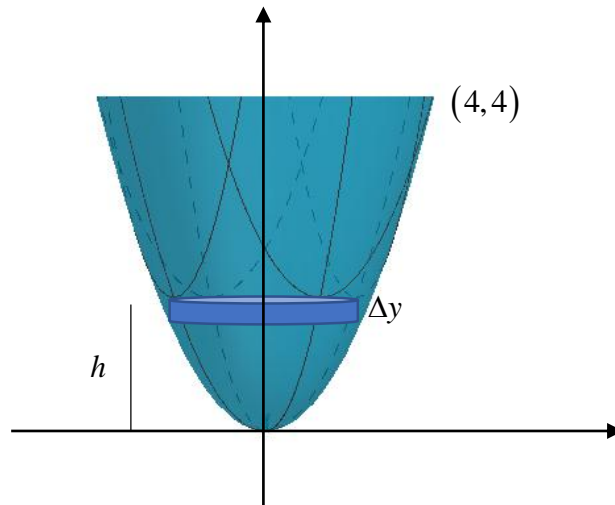
tiene que realizar la fuerza F, para bombear toda el agua del recipiente en forma de paraboloide, hacia afuera. Su valor numérico se calcula:

$$W = 4\pi\gamma \int_0^4 y(4 - y) \cdot dy = 4\pi\gamma \int_0^4 (4y - y^2) dy = 4\pi\gamma \left(2y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_0^4$$

$$w = 4\pi\gamma \left(32 - \frac{64}{3} \right) \approx 4 \times \pi \times 62.43 \times \frac{32}{3} \approx 7991.04 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot lb \cdot ft$$

b) Si se ha realizado un trabajo $w = 4000 lb - ft$ para bombear agua del recipiente, entonces podemos ilustrar este hecho en el siguiente **registro gráfico** $R_1^2(O_{10})$:

FIGURA 7 – CREACIÓN PROPIA



Registro algebraico $R_1^3(O_{10})$

$$w = 4\pi\gamma \int_h^4 y(4-y) dy = 4000 \Rightarrow \left(2y^2 - \frac{1}{3}y^3\right) \Big|_h^4$$

$$\text{De donde } 32 - \frac{64}{3} - 2h^2 + \frac{1}{3}h^3 = \frac{4000}{4\pi\gamma} \Rightarrow \frac{1}{3}h^3 - 2h^2 + 5.56 = 0$$

$$h \approx 2.1 \text{ ft}$$

La ecuación cúbica se ha resuelto con el programa GeoGebra.

Aplicación de la integral definida al cálculo de volúmenes de sólidos de revolución

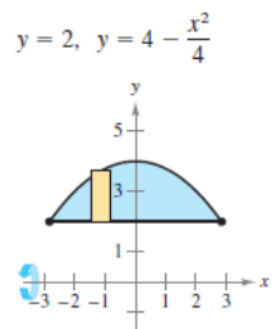
Resolución de problema 25 (b)

Formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región S_2

delimitada por las curvas $f(x) = 4 - \frac{x^2}{4} \wedge g(x) = 2$, girando

alrededor del eje indicado (X).

Registro simbólico $R_1^5(O_{17})$: O_{17} es el objeto volumen del sólido de revolución formado al girar la región S_2 en torno al eje X.

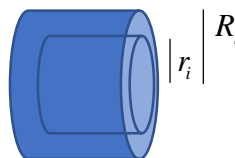


Esta región, al girar determina un sólido de revolución cuyo volumen aproximaremos por n cilindros huecos cuyos radios son $R_i = f(x_i)$ y $r_i = g(x_i)$ y de altura Δx , por tanto el i -ésimo cilindro hueco tiene como i -ésimo volumen

FIGURA 8 – CREACIÓN PROPIA

$$V_i = (\pi R_i^2 - \pi r_i^2) \Delta x = \pi [f^2(x_i) - g^2(x_i)] \Delta x$$

$$V_i = \pi \left[\left(4 - \frac{x_i}{4} \right)^2 - 2^2 \right] \Delta x = \pi \left[\frac{x_i^4}{16} - 2x_i^2 + 12 \right] \Delta x$$



Una aproximación al volumen del sólido de revolución sería $V \approx \sum_{i=1}^n \pi \left[\frac{x_i^4}{16} - 2x_i^2 + 12 \right] \cdot \Delta x$

El volumen exacto se obtiene cuando $n \rightarrow \infty$ o que determina que $\Delta x \rightarrow 0$ como sigue

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi \left[\frac{x_i^4}{16} - 2x_i^2 + 12 \right] \cdot \Delta x, \text{ lo cual se entiende también como:}$$

$$V = \pi \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(\frac{x^4}{16} - 2x^2 + 12 \right) \cdot dx = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\frac{x^4}{16} - 2x^2 + 12 \right) \cdot dx = \frac{448\sqrt{2}\pi}{15} \approx 132.69, \quad \text{que}$$

representa el volumen exacto del sólido de revolución formado al girar la región dada alrededor del eje x .

Los límites de integración se obtuvieron intersectando $f(x) \cap g(x)$.

Resolución del problema 27

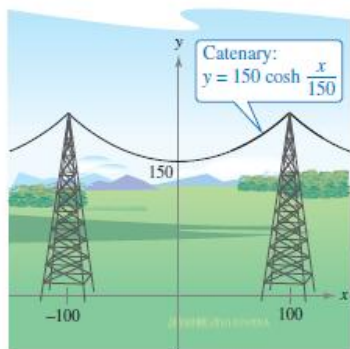
Longitud de Arco

(5 de 2, pg.481)

Un cable eléctrico cuelga entre dos torres que están a 200 m de distancia, como se muestra en la figura. El cable toma la forma de una catenaria cuya ecuación es:

$$f(x) = 150 \cosh \frac{x}{150} = 75(e^{x/150} + e^{-x/150}); -100 \leq x \leq 100$$

Registro algebraico-gráfico $R_1^3(O_{11})$, O_{11} es el objeto longitud de arco del cable de alta tensión de esta situación problemática.



Encontrar la longitud de arco del cable entre las dos torres.

Solución

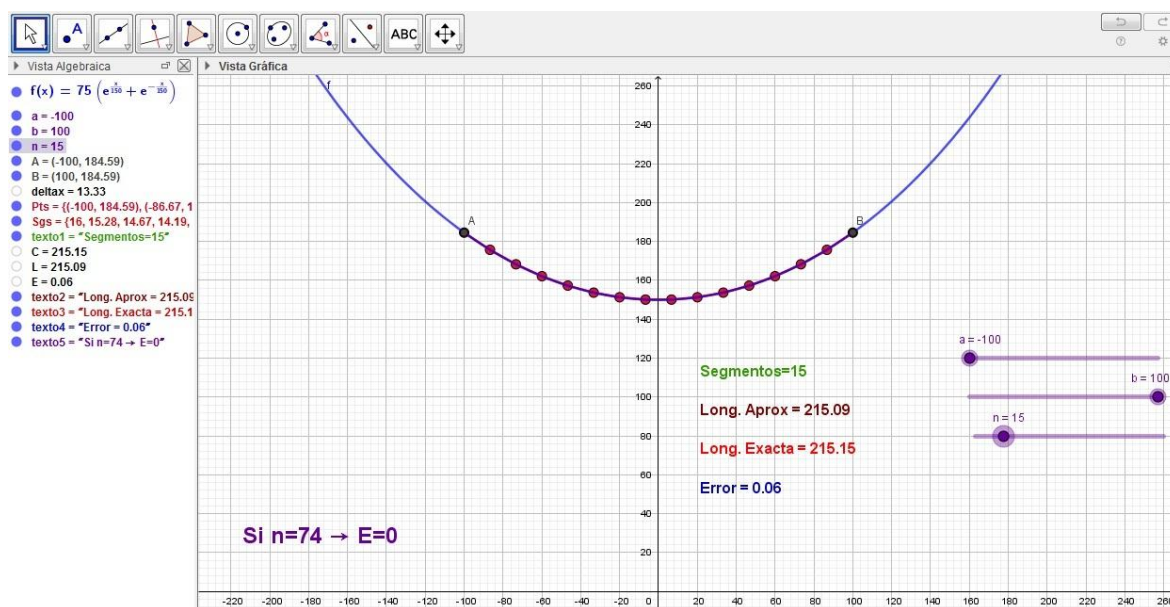
Para calcular la longitud de arco del cable de alta tensión, construimos una aproximación poligonal a la curva C que forma el cable entre las dos torres de alta tensión. Sea

$f(x) = 150 \cdot \cosh\left(\frac{x}{150}\right) = 75\left(e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}}\right)$ la función que define a C , en cuyo registro gráfico se muestra que f es continua en $[-100, 100]$.

Registro algebraico y gráfico $R_1^3(O_{11})$ y $R_1^2(O_{11})$, O_{11} es el objeto longitud de arco de la

función catenaria $f(x) = 150 \cosh\left(\frac{x}{150}\right)$, en $x \in [-100, 100]$.

FIGURA 9 – CREACIÓN PROPIA

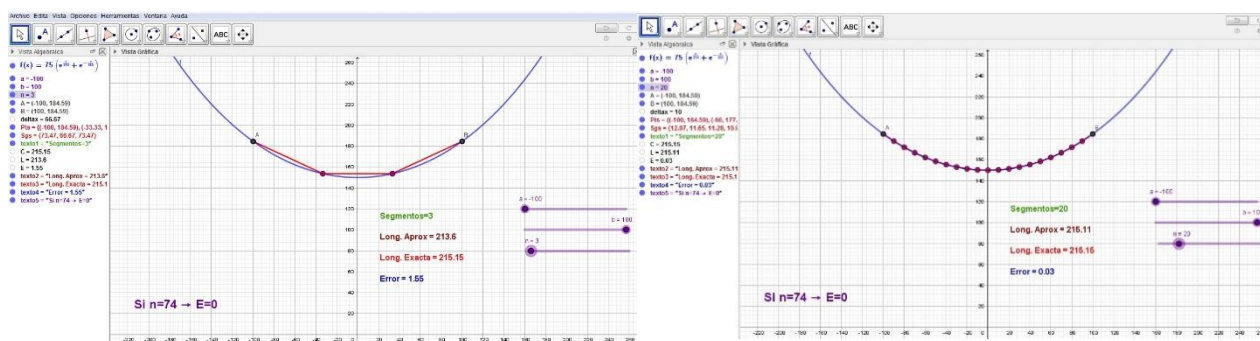


Registro simbólico $R_1^5(O_{11})$

Dividimos el intervalo $[-100, 100]$ en n subintervalos de igual longitud Δx y con extremos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Siendo $y_i = f(x_i)$, el punto $P_i(x_i, f(x_i))$ pertenece a la curva C y una aproximación a C es la línea poligonal abierta de extremos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$. La longitud del polígono es aproximada a la longitud de la curva $L(C)$. La aproximación va mejorando a medida que se incrementa el número de segmentos n ($n \rightarrow \infty$).

Registros gráficos $R_1^2(O_{12})$ y $R_2^2(O_{13})$, O_{12} es el objeto longitud aproximada a $L(C)$ por cobertura con línea poligonal abierta formada por tres segmentos y O_{13} es el objeto longitud aproximada a $L(C)$ por cobertura con línea poligonal abierta formada por setenta y cuatro segmentos.

FIGURA 10 – CREACIÓN PROPIA



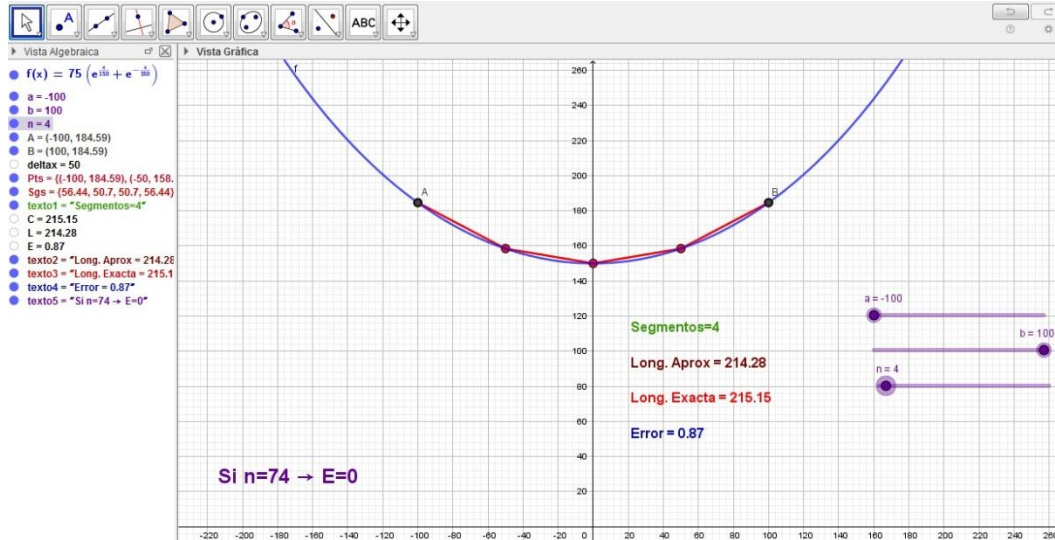
Definimos la longitud $L(C)$ de la curva C , de ecuación $y = f(x)$, $-100 \leq x \leq 100$, como el límite de la suma de las longitudes de estos polígonos inscritos (en caso que el límite exista); como sigue:

$$L(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n |P_{i-1}P_i|$$

Iniciemos el cálculo de la longitud de arco $L(C)$ aproximándola con líneas poligonales abiertas, primero cuando $n=4$:

Registro algebraico y gráfico $R_1^3(O_{14})$ y $R_1^2(O_{14})$, O_{14} es el objeto longitud aproximada a $L(C)$ por cobertura con línea poligonal abierta formada por cuatro segmentos.

FIGURA 11 – CREACIÓN PROPIA



Registro numérico $R_1^4(O_{14})$

Dividimos $[-100, 100]$ en 4 intervalos de igual tamaño $\Delta x = \frac{100 - (-100)}{4} = 50$, entonces

$P = \{-100, -50, 0, 50, 100\}$ es una partición de $[-100, 100]$, en la cual $x_0 = -100$, $x_1 = -50$, $x_2 = 0$, $x_3 = 50$, $x_4 = 100$, es decir $\{x_i = -100 + i \cdot \Delta x\}_{i=1}^4$. Los puntos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^4$ son puntos sobre la curva f que podemos tomarlos como extremos de segmentos rectos que forman un polígono que se aproxima a la curva:

$$x_0 = -100, f(x_0) = f(-100) = 75 \left(e^{\frac{-100}{150}} + e^{\frac{100}{150}} \right) \approx 184.59$$

$$x_1 = -50, f(x_1) = f(-50) = 75 \left(e^{\frac{-50}{150}} + e^{\frac{50}{150}} \right) \approx 158.41$$

$$x_2 = 0, f(x_2) = f(0) = 75 \left(e^{\frac{0}{150}} + e^{\frac{0}{150}} \right) \approx 150$$

$$x_3 = 50, f(x_3) = f(50) = 75 \left(e^{\frac{50}{150}} + e^{\frac{-50}{150}} \right) \approx 158.41$$

$$x_4 = 100, f(x_4) = f(100) = 75 \left(e^{\frac{100}{150}} + e^{\frac{-100}{150}} \right) \approx 184.59$$

Los extremos de los segmentos determinados por la partición son:

$$P_0 = (-100, 184.59), P_1 = (-50, 158.41), P_2 = (0, 150), P_3 = (50, 158.41) \text{ y } P_4 = (100, 184.59).$$

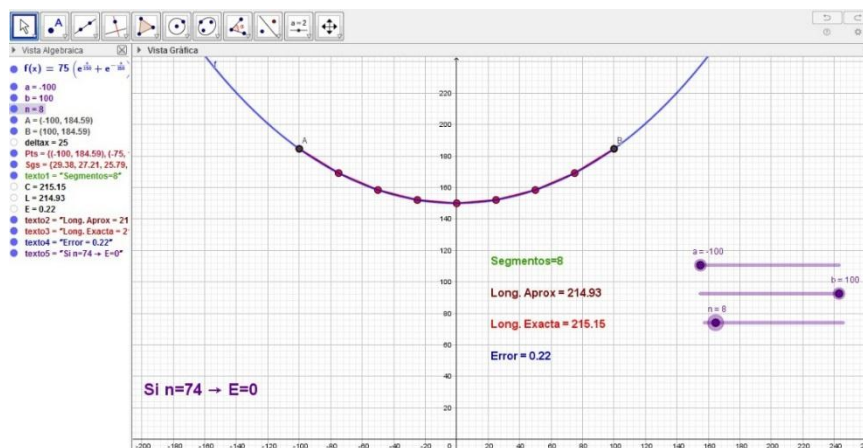
Para el caso del ejercicio, calculando de acuerdo a $|P_{i-1}P_i|_{i=1}^4 = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ tenemos:

$$L(C) \approx \sum_{i=1}^4 |P_{i-1}P_i| = 56.44 + 50.7 + 50.7 + 56.44 = 214.28$$

Ahora calculemos la longitud de arco $L(C)$ aproximándola con líneas poligonales abiertas, cuando $n=8$:

Registro algebraico y gráfico $R_1^3(O_{15})$ y $R_1^2(O_{15})$, O_{15} es el objeto longitud aproximada a $L(C)$ por cobertura con línea poligonal abierta formada por ocho segmentos.

FIGURA 12 – CREACIÓN PROPIA



Registro numérico $R_1^4(O_{15})$: Construcción de la línea poligonal abierta con ocho segmentos.

Dividimos $[-100, 100]$ en 8 subintervalos de igual tamaño $\Delta x = \frac{100 - (-100)}{8} = 25$, entonces

$P = \{-100, -75, -50, -25, 0, 25, 50, 75, 100\}$ es una partición de $[-100, 100]$, en la cual $x_0 = -100, x_1 = -75, x_2 = -50, x_3 = -25, x_4 = 0, x_5 = 25, x_6 = 50, x_7 = 75, x_8 = 100$, es decir $\{x_i = -100 + i \cdot \Delta x\}_{i=1}^8$. Los puntos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^8$ son puntos sobre la curva f que podemos tomarlos como extremos de segmentos rectos que forman un polígono que se aproxima a la curva:

$$x_0 = -100, f(x_0) = f(-100) = 75 \left(e^{\frac{-100}{150}} + e^{\frac{100}{150}} \right) \approx 184.59$$

$$x_1 = -75, f(x_1) = f(-75) = 75 \left(e^{\frac{-75}{150}} + e^{\frac{75}{150}} \right) \approx 169.14$$

$$x_2 = -50, f(x_2) = f(-50) = 75 \left(e^{\frac{-50}{150}} + e^{\frac{50}{150}} \right) \approx 158.41$$

$$x_3 = -25, f(x_3) = f(-25) = 75 \left(e^{\frac{-25}{150}} + e^{\frac{25}{150}} \right) \approx 152.09$$

$$x_4 = 0, f(x_4) = f(0) = 75 \left(e^{\frac{0}{150}} + e^{\frac{0}{150}} \right) \approx 150$$

$$x_5 = 25, f(x_5) = f(25) = 75 \left(e^{\frac{25}{150}} + e^{\frac{-25}{150}} \right) \approx 152.09$$

$$x_6 = 50, f(x_6) = f(50) = 75 \left(e^{\frac{50}{150}} + e^{\frac{-50}{150}} \right) \approx 158.41$$

$$x_7 = 75, f(x_7) = f(75) = 75 \left(e^{\frac{75}{150}} + e^{\frac{-75}{150}} \right) \approx 169.14$$

$$x_8 = 100, f(x_8) = f(100) = 75 \left(e^{\frac{100}{150}} + e^{\frac{-100}{150}} \right) \approx 184.59$$

Los extremos de los segmentos determinados por la partición son:

$P_0 = (-100, 184.59), P_1 = (-75, 169.14), P_2 = (-50, 158.41), P_3 = (-25, 152.09), P_4 = (0, 150)$
 $P_5 = (25, 152.09), P_6 = (50, 158.41), P_7 = (75, 169.14)$ y $P_8 = (100, 184.59)$

Para el caso del ejercicio, calculando la longitud de cada segmento del polígono, de acuerdo

con: $|P_{i-1}P_i|_{i=1}^8 = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ tenemos:

$$L(C) \approx \sum_{i=1}^8 |P_{i-1}P_i| = 29.38 + 27.21 + 25.79 + 25.09 + 25.79 + 27.21 + 29.38 = 214.93$$

Registro en lenguaje simbólico: $R_1^5(O_{15})$

Calculando el tamaño de cada uno de los n segmentos resultantes, tenemos:

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i|_{i=1}^n &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}, \{y_i = f(x_i)\}_{i=1}^n \text{ y } \Delta y_i = y_i - y_{i-1} \Rightarrow \\ |P_{i-1}P_i|_{i=1}^n &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]_{i=1}^n$, hay un valor $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$ o sea $\Delta y_i = f'(x_i^*)\Delta x$, entonces queda:

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\Delta x]^2} = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \cdot \sqrt{(\Delta x)^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \cdot \Delta x, \Delta x > 0 \end{aligned}$$

Por la definición de $L(C)$ se tiene:

$$L(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \cdot \Delta x, \text{ expresión que se reconoce igual a:}$$

$$L(C) = \int_{-100}^{100} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \dots\dots\dots (1) \text{ (Stewart, 2018)}$$

Calculando la integral para el caso de la situación problemática abordada, se tiene

$$L(C) = \int_{-100}^{100} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{150}} - e^{\frac{-x}{150}} \right) \right]^2} dx = 300 \cdot \sinh\left(\frac{2}{3}\right) \approx 215.15 \text{ (Calculado con GeoGebra y}$$

WolframAlpha)

Mostramos el cálculo manual de $L(C)$:

Registro algebraico $R_1^3(O_{16})$, O_{16} es el objeto longitud de arco $L(C)$ obtenida aplicando la fórmula (1).

$$f(x) = 150 \cosh\left(\frac{x}{150}\right) \Rightarrow f'(x) = \sinh\left(\frac{x}{150}\right), -100 \leq x \leq 100$$

$$\Rightarrow L(C) = \int_{-100}^{100} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{150}\right)} \cdot dx = \int_{-100}^{100} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{150}\right)} \cdot dx$$

$$\Rightarrow L(C) = 150 \left[\sinh\left(\frac{x}{150}\right) \right]_{-100}^{100} = 150 \left[\sinh\left(\frac{100}{150}\right) - \sinh\left(\frac{-100}{150}\right) \right]$$

$$L(C) = 150 \left[2 \sinh\left(\frac{2}{3}\right) \right] = 300 \cdot \sinh\left(\frac{2}{3}\right) \approx 215.15$$

En la resolución de los ejercicios de la práctica, hechos anteriormente, los tratamientos realizados en los registros semióticos considerados, los hicimos con todos los detalles algorítmicos para que pudiera compararse como para cubrimientos pequeños los tratamientos pueden resultar tediosos, engorrosos y a veces complicados, creando conflictos semióticos en los estudiantes y comprometiendo la devolución del conocimiento. Imaginemos como sería para cubrimientos con número de rectángulos muy grande. Por esto nos apoyamos con el software dinámico y gratuito GeoGebra, para evitar conflictos semióticos en el aprendizaje y dirigir la atención al aprendizaje conceptual. Como discierne Ely (2017) cuando afirma que los ordenadores pueden computar cualquier integral, pero no pueden ver una situación y escribir una integral que la represente; y por esto los planes de estudio del cálculo (análisis por infinitesimales) deben dar un giro y apoyar la necesidad de modelar e interpretar, es decir, instrumentar a los estudiantes con modalidades de interpretar la notación del cálculo que respalda su modelado e interpretación de los contextos que devienen de las aplicaciones de la integral definida. Proporcionar a los estudiantes formas de interpretar las piezas de notación del cálculo para que representen y trabajen de manera confiable y significativa con cantidades en un contexto determinado. Solo este hecho, justifica nuestra investigación.

II. MÉTODO

2.1. Tipo y diseño de investigación

Esta investigación es descriptiva y está orientada a la caracterización teórica (considerando algunos aspectos ontológicos, epistemológicos, cognitivos y semióticos) de los registros de representación semiótica que se movilizan y coordinan (con sinergia) para lograr, en los estudiantes de ingeniería, aprendizajes significativos del concepto de integral definida y facilitarles el trabajo de solución de situaciones problemáticas que afronten al tratar con aplicaciones a la ingeniería.

2.2 Escenario de estudio

El escenario de estudio es: las situaciones contextualizadas o situaciones-problema extraídos de un componente (dos prácticas) de un sistema de prácticas o praxeología que se han compilado seleccionando ejercicios y problemas de tres textos utilizados en la enseñanza-aprendizaje del cálculo integral con sus aplicaciones. Elegimos Stewart, J. (2018), Larson, R. (2011) y Hibbeler, R., por ser textos que consideramos más adecuados al propósito de caracterizar, movilizar y coordinar (realizar las conversiones entre registros, de manera sinérgica) los registros de representación, tanto para conceptualizar integral definida, como para resolver los problemas de aplicación a la ingeniería.

2.3. Participantes

Praxeología intra y extramatemática, con ejercicios y problemas propuestos, seleccionados de los tres textos muy usados por las instituciones de educación superior de Trujillo, en la enseñanza de cálculo integral, que se han compilado y algunos desarrollado y de los cuales consideramos emerge el objeto integral definida que nos proponemos conceptualizarlo mediante sus representaciones en registros semióticos, que analizaremos evidenciándolos y caracterizándolos, así como explicando las transformaciones ocurridas entre sus representaciones con o sin cambio de registro (conversiones y tratamientos), visando construir el concepto o conceptualizar la integral definida y facilitar la resolución de problemas de aplicación a la ingeniería. Nos apoyamos con el software gratuito GeoGebra con la intención de evitar conflictos semióticos en el proceso de aprendizaje, con respecto a determinada complejidad para graficar funciones o coberturas rectangulares, comprensión de infinitesimales, cálculo de límites al infinito y cálculos aritméticos y simbólicos que pueden resultar engorrosos y tediosos hacerlos manualmente (Aranda, C. y Callejo, M. Luz., 2010).

2.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

La técnica utilizada es el análisis documental, utilizando una ficha de análisis como instrumento de estudio analítico (véase en Anexo II).

La ficha de análisis de esta investigación involucra componentes otológicos, epistemológicos y semióticos sobre los objetos matemáticos, sus representaciones en registros semióticos con sus significados correspondientes, las transformaciones que se realizan de una representación en otra, tanto en el mismo registro como en registros diferentes con el propósito de conceptualizar la integral definida y facilitar la resolución de problemas aplicados a la ingeniería como trabajo mecánico, longitud de arco, fuerza de empuje, campo eléctrico y centro de masa. Las situaciones problemáticas sobre áreas de regiones planas y volúmenes de sólidos de revolución también viabilizan la conceptualización de la integral definida.

La ficha o tabla de análisis está dividida en siete partes: concepto, registro, representación objeto representante, objeto representado, funcionalidad, conversiones y tratamientos.

2.5. Procedimiento

El análisis se aplicó a la resolución hecha, primero, de una situación problemática que involucra el cálculo del área de una región plana con una de sus fronteras siendo la función $f(x)$ continua y positiva en $[a, b]$ (ejercicio 5 de la práctica), ver pag. 84. En este análisis se evidencian los objetos matemáticos emergentes: función, área aproximada por sumas superiores de Riemann, por cobertura con cuatro y ocho rectángulos; para lo cual se movilizaron los registros algebraico, geométrico, numérico y simbólico y sus respectivas conversiones y tratamientos. Los objetos área aproximada obtenida por la regla de los puntos medios, por cobertura con cuatro y ocho rectángulos; para lo cual se movilizaron los mismos registros anteriores y sus respectivas conversiones y tratamientos. Los objetos área aproximada obtenida por sumas inferiores de Riemann, por cobertura con cuatro y ocho rectángulos; para lo cual se movilizaron los mismos registros anteriores y sus respectivas conversiones y tratamientos. Para construir el concepto del objeto área aproximada obtenida por sumas inferiores de Riemann, por cobertura con un número finito n de rectángulos ($n > 8$), se movilizaron los registros simbólicos de representación con suma extendida y con notación sigma, preparando el terreno para conceptualizar el objeto área exacta de S_1 como integral definida sobre el intervalo $[1, 5]$. Por último. Para conceptualizar el objeto área exacta de la región S_1 se movilizaron en el registro simbólico las representaciones como límite de una

suma infinita y como integral definida de $f(x)$ sobre el intervalo $[1, 5]$. En segundo lugar, analizamos los registros de representación semiótica que se movilizan para conceptualizar la integral definida como el trabajo mecánico (problema 20 de la práctica), ver pag. 98, necesario para vaciar el agua contenida en un recipiente en forma de paraboloide, de cuatro pies de profundidad y cuatro pies de radio de la boca. Los objetos que emergieron son, la cantidad exacta de energía necesaria para que la fuerza variable F , vacíe el agua contenida en el recipiente en forma de paraboloide; el objeto i -ésima cantidad de energía exacta necesaria para que la i -ésima fuerza constante que actúa sobre la cantidad de agua contenida en la i -ésima rebanada, tomada de una cobertura por n rebanadas cilíndricas circulares rectas, que recubren aproximadamente la porción del paraboloide que delimita el recipiente, para desplazarla hasta el nivel de la boca de dicho recipiente. El objeto trabajo aproximado a W , resultante de la suma extensiva de los n trabajos $\{w_i\}_{i=1}^n$ que realizan las n fuerzas $\{F_i\}_{i=1}^n$ para desplazar las n masas de agua $\{m_i\}_{i=1}^n$ contenidas en las n rebanadas del cubrimiento de la masa total de agua contenida en el recipiente en forma de paraboloide; el objeto Trabajo aproximado a W , resultante de la suma con notación sigma de todos los n trabajos $\{w_i\}_{i=1}^n$ que realizan las n fuerzas $\{F_i\}_{i=1}^n$ para desplazar las n masas $\{m_i\}_{i=1}^n$ contenidas en las n rebanadas del cubrimiento aproximado de la masa total de agua contenida en el recipiente en forma de paraboloide, hasta la boca de dicho recipiente; objeto cantidad exacta de energía necesaria para que la fuerza variable $F(x)$ vacíe la masa de agua contenida en el recipiente en forma de paraboloide, representada por notación con integral definida. También se ha resuelto la aplicación del cálculo de la longitud de arco en forma de catenaria (problema 27 de la práctica) de la cual no se ha hecho, en este trabajo, un análisis de los registros semióticos para conceptualizar longitud exacta del cable debido a que tal análisis sería análogo a los anteriores.

2.6. Método de análisis de información

Coherentes con el diseño cualitativo, la trayectoria metodológica la presentamos en el siguiente cuadro:

ACTIVIDADES	CARACTERÍSTICAS ONTOLÓGICAS Y SEMIÓTICAS
<p>1. Análisis de los objetos matemáticos emergentes de la situación problemática.</p>	<p>Conceptos: función área aproximada al área de S_I (diferentes recubrimientos con 4R y 8R, por exceso y por defecto); área aproximada al área de S_I del cubrimiento por defecto con nR ($n > 8$), área exacta de S_I (como límite de una suma infinita y como integral definida). Objeto cantidad necesaria de energía w para que la fuerza variable F logre vaciar un tanque en forma de paraboloides, objeto trabajo necesario w_i para que la fuerza constante F_i desplace la masa de agua m_i, contenida en la i-ésima rebanada del cubrimiento de la masa total de agua contenida en el recipiente en forma de paraboloides, hasta la boca de dicho recipiente; objeto cantidad aproximada (a w) de energía resultante de la suma extensiva $w \approx w_1 + w_2 + \dots + w_n$, necesaria para que las fuerzas $\{F_i\}_{i=1}^n$ desplacen las masas $\{m_i\}_{i=1}^n$ desde el nivel de profundidad en que se encuentra cada una, hasta la boca del recipiente en forma de paraboloides; objeto cantidad aproximada (a w) de energía, resultante de la suma con notación sigma $w \approx \sum_{i=1}^n w_i$, necesaria para que las fuerzas $\{F_i\}_{i=1}^n$ desplacen las masas $\{m_i\}_{i=1}^n$ desde el nivel de profundidad en que se encuentra cada una, hasta la boca del recipiente en forma de paraboloides; objeto trabajo, w, exacto y necesario para vaciar la masa total de agua contenida en el recipiente parabólico, obtenido como límite de una suma infinita; Trabajo, w,</p>

	exacto y necesario para vaciar la masa total de agua contenida en el recipiente parabólico, obtenido como integral definida.
2. Identificar en que registro se hace la representación semiótica.	Cada representación semiótica se hace en un determinado registro, cuando se transforma en otra representación en el mismo registro, se produce un tratamiento y cuando esta transformación cambia de registro se produce una conversión.
3. Representación semiótica de los objetos emergentes.	Cada representación semiótica de los objetos matemáticos $R_{i=1}^j(O_k)$ se le asignó los subíndices j indicando el tipo de registro, i el tipo de representación en el registro j y k el tipo de objeto matemático.
4. Diferenciación entre objeto representante y representado.	El objeto representante lo constituye la cadena simbólica, que generalmente es icónica y el representado es el objeto que será conceptualizado a través de las representaciones semióticas.
5. Determinación de la funcionalidad del objeto emergente.	La existencia de los objetos matemáticos se debe a su funcionalidad, en la tabla de análisis describimos la funcionalidad de cada uno de los objetos en el contexto de la situación problemática.
6. Explicitación de las conversiones y tratamientos.	Cuando la transformación requiere de reglas establecidas se llama tratamiento, en caso contrario es una conversión. Aquí se establece la diferencia.

2.7. Aspectos éticos

Esta tesis se fundamenta en un amplio espectro de información de temas puntuales, sobre educación matemática y particularmente sobre didáctica de la matemática, provenientes de fuentes como: investigaciones, artículos científicos, textos, y otros; que han aportado un haz de conocimientos a la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y en particular del cálculo integral, disciplina con la que experimentan mucha dificultad los estudiantes de ingeniería, tanto para su comprensión como para la resolución de situaciones

problemáticas de aplicación. Esta tesis es original y su contenido no es copia de otros documentos.

III. RESULTADOS

Los resultados que se describen a continuación se obtuvieron a partir de la resolución detallada de dos situaciones problemáticas planteadas en la práctica: la conceptualización histórica de integral definida como área bajo una función continua y positiva (proveniente históricamente del método de agotamiento) y de la aplicación de la integral definida al vaciado de agua de un tanque en forma de paraboloides.

Siguiendo nuestro objetivo general de caracterizar los registros de representación semiótica involucrados en esta investigación, movilizamos en este trabajo los registros algebraico, geométrico, numérico y simbólico, a fin de conceptualizar la integral definida y lograr no confundir el objeto integral definida con sus representaciones (Duval, R., Trad. Moretti, M., 1981, pg. 270) debido a la carencia de unicidad al ser representada. Partimos siempre del binomio de registros algebraico-gráfico, primero por la facilidad con que se pueden construir las gráficas, con el software dinámico GeoGebra, ingresando las ecuaciones algebraicas de las funciones o ingresando las instrucciones para los cubrimientos por sumas superiores, regla de los puntos medios o sumas inferiores de Riemann; segundo, para potenciar la percepción visual al presentar un panorama claro de la representación gráfica del objeto matemático que se está analizando, visando generar las intuiciones pertinentes y necesarias para la aprehensión conceptual de la integral definida y facilite la resolución de situaciones problemáticas aplicadas a la ingeniería, donde se involucre integral definida; y, tercero porque evita cálculos simbólicos engorrosos y desnecesarios para la construcción de gráficas o cubrimientos del área de S_1 con rectángulos. También GeoGebra evita los conflictos semióticos producidos por los infinitesimales (utilizando la herramienta deslizador), límites al infinito, cubrimientos con número grande de rectángulos, etc. En la resolución del ejercicio 5 se movilizaron los registros algebraico, geométrico, numérico y simbólico. Se inició con la aproximación por cubrimiento al área bajo la curva $f(x) = x - 2\ln(x)$ en $[1, 5]$, con cuatro y ocho subintervalos iguales. En los registros numéricos correspondientes se realizaron los cálculos, manualmente, de la base y las alturas de cada uno de los rectángulos de cada cubrimiento, para luego calcular sus áreas y al sumarlas obtener una aproximación al área exacta (AE) que resultó $AE=3,91$ calculada con el programa online WolframAlpha por integral definida. El área aproximada por sumas superiores de Riemann

(AAUS) resultó $AAUS=4,81$ y por sumas inferiores de Riemann (AALS) $AALS=3,26$. Por cubrimiento con cuatro rectángulos (C4R). Con un cubrimiento por ocho rectángulos, se hizo un tratamiento análogo, obteniéndose las aproximaciones $AAUS=4,33$ y $AALS=3,55$. Este estudio tiene significancia porque a partir de los cubrimientos C4R y C8R se aprecia que los valores de las sumas superiores de Riemann se aproximan de manera monótona decreciente al valor del área exacta, y las sumas inferiores de Riemann se aproximan de manera monótona creciente al mismo valor. El software interactivo GeoGebra nos permitió, usando la herramienta deslizador, aumentar progresivamente el número de rectángulos del cubrimiento e ir teniendo la experiencia de percibir, progresivamente, la monotonía con que se van aproximando las sumas superiores e inferiores de Riemann, a medida que van aumentando el número de rectángulos en los cubrimientos respectivos. Esta experiencia, en su completa dimensión, es difícil tenerla fuera de un entorno tecnológico. Construimos la applet 1, para tener la experiencia visual e intuitiva de cómo, al aumentar el número de subintervalos en las particiones de $[1, 5]$ y por ende el de los rectángulos de los cubrimientos de S_1 , los valores de las sumas superiores e inferiores de Riemann convergen monótonamente al valor exacto de la región. Observamos en la applet 1 que al mover el deslizador hasta $n=5003$, es decir tomando una partición de 5003 subintervalos iguales en $[1, 5]$ que generan el cubrimiento C5003R, los valores de las sumas superiores e inferiores de Riemann “alcanzan” el valor del área exacta de S_1 ; por supuesto que, por ser $AE = 20 - 10\ln(5)$ un número trascendente, usamos, en la Apple x, aproximaciones a dos decimales, tanto para AE, AAUS, AALS como para los errores AE-AAUS y AE-AALS y entonces para ese valor de n se observa que $AAUS=3,91$, $AALS=3,91$, $AE-AAUS=0$ y $AE-AALS=0$; lo cual da una “sensación” que los valores de las sumas superiores e inferiores de Riemann “alcanzaron” el valor exacto del área de S_1 . Los registros simbólicos R_1^5 y R_2^5 juegan el rol de pasar de la aproximación discreta hacia la obtención del área de forma continua. Estos registros permiten una expresión simbólica y general de las sumas de Riemann, permitiendo la representación del área aproximada por sumas expandidas y por sumas con notación sigma, con las cuales al aumentar tanto como se pueda el número de subintervalos de la partición del intervalo $[1, 5]$ y con ello el número de rectángulos del cubrimiento C_nR ($n \rightarrow \infty$), tomando el límite como proceso y como objeto, se obtiene el valor exacto del área de S_1 [$AE = 20 - 10 \cdot \ln(5)$]. También se explotó la concepción de integral definida como primitiva de una función y se calculó manualmente, usando el criterio

ILATE y aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo (Espinoza, 2012). La movilización de varios registros de representación semiótica, la evidencia de sus conversiones y tratamientos, así como la coordinación entre registros realizada utilizando GeoGebra y haciéndolo analíticamente, vislumbran una trayectoria didáctica que al aplicarla pueden generar aprendizajes significativos en los estudiantes del cálculo integral y sus aplicaciones a la ingeniería; tanto para la conceptualización de la integral definida como para el favorecimiento de la resolución de problemas de aplicación a la ingeniería, como mostramos al resolver el problema 20 de la práctica, que trata sobre el trabajo mecánico necesario para vaciar el agua de un tanque en forma de un paraboloides, de cuatro pies de profundidad y cuatro pies de radio de la boca. Se movilizaron los mismos registros de representación semiótica que para el caso de la resolución del problema 5. La funcionalidad de los objetos matemáticos se relaciona estrechamente con los fenómenos físicos que están, tales objetos, también, representando. En el caso del problema 20, se representan una fuerza variable que tiene que desplazar una masa de agua fuera de un recipiente en forma de paraboloides. La idea de llegar a la integral definida que represente la cantidad exacta de energía necesaria para que la fuerza variable consiga vaciar la masa de agua contenida en el recipiente, tiene como punto de partida calcularlo, a partir de aproximaciones y estas requieren aproximar la masa de agua contenida en el del sólido recipiente mediante cubrimientos por cilindros circulares rectos iguales, resultantes de hacer una partición del intervalo $[0, 4]$ contenido en el eje \vec{Y} . Cada i -ésimo cilindro es una rebanada de la cobertura de la masa de agua y contiene un i -ésimo volumen V_i que con la densidad del agua, se calcula la i -ésima masa m_i de agua de la i -ésima rebanada. Como hay que vencer la gravedad para desplazar la i -ésima rebanada de agua desde su posición y_i (profundidad en el recipiente) hasta el nivel de la “boca” del recipiente (la distancia $4 - y_i$) lo que determina la i -ésima fuerza $F_i = m_i g$ que transfiere la energía necesaria para desplazar la i -ésima rebanada de agua (Tipler y Mosca, 2010, p. 174). También se puede construir una Applet, en la cual se pueda tener la experiencia dinámica de observar como la serie de los valores de los trabajos $\{w_i\}_{i=1}^n$ se van “acercando” a W , a medida que el número de rebanadas de masa de agua aumentan tanto como se quiera. Aun cuando las rebanadas de agua son tridimensionales y los rectángulos de los cubrimientos del ejercicio 5, la trayectoria didáctica para conceptualizar el área bajo una curva y el trabajo necesario para vaciar la masa de agua contenida el

recipiente, creemos, es la misma. Para pasar de la aproximación al trabajo exacto recurrimos a los registros simbólicos R_1^5 y R_2^5 con sumas extendidas y con notación sigma y tomando el límite de estas sumas que coincide con la integral definida $W = 4\pi\gamma \int_0^4 y(4-y) \cdot dy$ que calcula el trabajo exacto. Entonces, para facilitar la resolución de problemas de aplicación que tenga que ver con calcular el área bajo una curva o el trabajo mecánico, visando conceptualizar integral definida y los objetos matemáticos relacionados con esta, necesarios para lograr facilidad para resolver las aplicaciones; presentamos una trayectoria didáctica que conjeturamos, de seguirla, van a generar aprendizajes significativos en los estudiantes de cálculo integral durante la mediación semiótica docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la actividad matemática. Esto lo podemos entender como un aporte a lo acostumbrado en la mediación docente de tentar conceptualizar por definiciones y resolver aplicaciones solo de manera algorítmica, principalmente algebraica y numérica. El apoyo obtenido con el uso del software GeoGebra radica en evitar conflictos semióticos con respecto a gráficas de funciones, cubrimientos, cálculo simbólico, límites al infinito, convergencia de series, etc., que muchas veces comprometen la devolución de los estudiantes, debido a la complejidad de la comprensión y el manejo conceptual de estos objetos matemáticos. La praxeología propuesta, de donde emergen los objetos y procedimientos matemáticos que trabajamos, nos da el crédito de cumplimiento de nuestro objetivo de estructurar un modelo de registros de representación semiótica. Por supuesto que puede ser extendido y mejorado, pero nos ha servido para justificar este estudio de los registros de representación semiótica que movilizamos y coordinamos para resolver un problema intramatemático de área bajo una curva (problema 5) y otro extramatemático de aplicación al cálculo del trabajo mecánico (problema 20); en ambos se representaron los objetos matemáticos con registros algebraicos, geométricos, numéricos y simbólicos, de acuerdo con la teoría de Raymond Duval, cuidando que tales registros identifiquen a los objetos representados, se evidencien los tratamientos y conversiones que ocurren en y entre estos registros. Estos tres elementos caracterizan nuestros registros de representación semiótica como acción de la cognición comprometida en las aptitudes matemáticas necesarias para facilitar la resolución de los problemas de aplicación (Hernández, Cervantes, Ordoñez-Cuastumal y García, 2017). En las tablas de análisis, las unidades de análisis contienen componentes semióticas con signos y significados, componente ontológico que muestra como los objetos emergen de la praxeología y la funcionalidad que desempeñan al

interpretar u organizar un fenómeno, componentes cognitivas presentes en el atributo de los registros para identificar los objetos matemáticos, realizar tratamientos en un mismo registro y conversiones de un registro en otro y componentes epistemológicas que evidencian la actividad matemática como una actividad antropológica social. La trayectoria didáctica de representación semiótica de los objetos matemáticos, presentada en la resolución del problema 5, puede ser seguida, de forma análoga, por ejemplo en la resolución del problema 27, en el cual, se pide calcular la longitud de arco de un cable, en forma de catenaria, que cuelga de dos torres eléctricas. En este trabajo, mostramos, que la trayectoria didáctica para la resolución de este problema, es similar a la seguida en la resolución del problema 5, con sus particularidades propias de la naturaleza de la situación problemática, pero en general, aproximando la longitud del cable por cubrimientos con segmentos que forman una línea poligonal abierta que termina coincidiendo con el cable, cuando se toma un número de segmentos tan grande cuanto se quiera y el límite de la suma de las longitudes de los segmentos representa la integral definida que permite el cálculo exacto de la longitud del cable. En la resolución de este problema, evitamos los conflictos semióticos relacionados con la gráfica del cable, los cubrimientos, límites al infinito y cálculos simbólicos engorrosos, utilizando el software dinámico GeoGebra. Dejamos, también, la resolución del problema 25 (b) sobre volumen de un sólido de revolución generado por la rotación de la región plana S_2 alrededor del eje \tilde{x} , en esta, también, usamos una trayectoria pedagógica esencialmente análoga a las aplicadas en los problemas mencionados anteriormente, con sus propias particularidades, pero con las ideas esenciales de partición, cubrimiento, aproximación y salto al infinito. El software dinámico GeoGebra, jugando el papel de evitar o minimizar los conflictos semióticos que se presentan en el aprendizaje conceptual y procedimental, y por tanto se generen aprendizajes significativos en los estudiantes de ingeniería, que aborden el cálculo integral y sus aplicaciones.

IV. DISCUSIÓN

Los registros de representación semiótica movilizados y coordinados en la resolución de los problemas 5 y 20 de la práctica considerada en este trabajo, constituyen un modelo cognitivo del pensamiento, que viabiliza la representación y comprensión conceptual del objeto matemático integral definida y de los procedimientos que visan facilitar la resolución de problemas de aplicación, de este objeto, a la ingeniería. (Duval, 1993, Trad. Moretti, 2012, pg. 266). En las tablas de análisis se categorizan tanto la representación como el objeto representado, evidenciando así la diferencia esencial entre el objeto matemático y su representación, tan necesario para evitar la paradoja de Duval. (Damisa y Ponzetti, 2015, p.137), (Duval, 1993, Trad. Moretti, 2012). En las mismas tablas de análisis destacamos la funcionalidad que desempeñan cada uno de los objetos involucrados en nuestro estudio, debido a que el reconocer esta funcionalidad que puede ser organizativa o interpretativa del contexto que representa (sistema de prácticas) da paso a la comprensión del objeto matemático (Pecharromán, 2014, p. 112) desde una posición ontológica. También, en dichas tablas, se señalan las conversiones y tratamientos que han ocurrido en y entre los registros movilizados, porque estas transformaciones forman parte del motor de la actividad matemática (Duval, 1993, Trad. Moretti, 2012, p. 266). Como dice Duval, desde la óptica matemática las transformaciones de conversión y tratamiento son un todo en la actividad matemática de resolución de problemas (Duval, 2006, Trad. Quesada, H, p. 149). Construimos las applets 1 e 2, con GeoGebra, para evidenciar la efectividad de las secuencias didácticas que permiten tener la experiencia de aproximación por cubrimientos y el “salto al infinito” para alcanzar la exactitud. Tal experiencia viabiliza mejorar la comprensión conceptual de los alumnos de ingeniería permitiéndoles acercarse a los conceptos mediante diversas representaciones de estos, superando el hecho de que en los diferentes niveles de enseñanza no se enfatiza la diversidad de representaciones y mucho menos la coordinación entre ellas. Orientando, los entornos tecnológicos (colaborativos e interactivos) apoyados por ordenador y software dinámico, a generar situaciones de aprendizaje en las cuales se ofrezcan herramientas que permitan, a los estudiantes, desarrollar su máximo potencial cognitivo, aproxima de lograr aprendizajes efectivos y significativos (Gruszycky, Oteiza, Maras, Gruszycky y Ballés, 2014, p. 2169). Con respecto a entornos tecnológicos (Turégano, 1997, pp- 44-46) usa los programas ALTURAS, APROXIMA e INTEGRAL en las actividades que propone para pasar al concepto abstracto de integral definida. Gatica, y Ares, 2011, usan la interface gráfica de MATLAB, GUI (graphical user interface) para

conceptualizar integral definida. En este trabajo los autores señalan algunas dificultades que tienen los estudiantes para la aprehensión de integral definida, relacionados con los textos y el propio enfoque que norte a la mediación docente y, plantean la visualización, como necesaria para salir de estas dificultades. Manejando el argumento que en la visualización se movilizan los registros numérico, gráfico, algebraico, verbal y gestual y que, además, esta interviene con la fisiología de las estructuras cognitivas y con las relaciones entre las representaciones en juego (coordinaciones), los autores consideran la visualización como un medio, del que dispone el estudiante, para lograr un mejor entendimiento, es decir, comprender un concepto mediante una imagen visual (Gatica, y Ares, 2011, pp. 79, 80). En nuestro trabajo utilizamos GeoGebra como recurso de visualización, necesario para la aprehensión conceptual de integral definida en tiempo real y para evitar conflictos semióticos en su aprendizaje y en el abordaje al resolver problemas de aplicación a la ingeniería. El contexto de nuestro estudio lo constituye la práctica considerada (ver anexo), de la cual los estudiantes adquieren su experiencia y de la que emerge el objeto matemático integral definida y otros objetos conexos con este estudio. El objeto integral definida asume un estado que se deriva de la práctica que lo precede (Font, Godino y Gallardo, 2013). Como lo expresó Godino con respecto al significado de los objetos matemáticos que debe llevar a pensar en términos de “los sistemas de prácticas que realiza un individuo para resolver determinada clase de problemas”. Prácticas que como acciones operatorias y discursivas cuando hechas por un individuo se puede hablar de significado personal y cuando hecha en el seno institucional se trata del significado institucional (Godino, 2002, p. 241), (Font, Godino y D’Amore, 2007, p. 3). En este trabajo, los significados de los objetos matemáticos y de los procedimientos los damos de forma expresa, escrita y discursiva. Por tanto, en la solución de los problemas 5 y 20 de práctica, el señalamiento de la funcionalidad de los objetos matemáticos como elemento esencial de su existencia ontológica, la diferenciación señalada entre objeto representante y representado, así como la explicitación de las transformaciones de conversión y tratamiento entre registros de representación y sus respectivas coordinaciones, caracterizan los registros de representación semiótica, que al mismo tiempo las fundamentamos principalmente con las teorías de Duval (Duval, 1993, Trad. Moretti, 2012), (Duval, 2006, Trad. Quesada), Godino (Godino, 2002), D’Amore (D’Amore, 2011), (Font, Godino, y D’Amore, 2007).

V. CONCLUSIONES

El presente trabajo se ha hecho con el propósito de mostrar la importancia de la naturaleza ontológica de los objetos matemáticos radicada en la funcionalidad que desempeñan en el contexto (sistema de prácticas intramatemáticas y extramatemáticas) del cual emergen, de las representaciones semióticas que lo identifican y suplen al movilizar una diversidad de registros con sus respectivas transformaciones de conversión y tratamiento, así como de la coordinación entre estos registros. Utilizamos el software GeoGebra para aprovechar sus vistas algebraica y gráfica, el cálculo simbólico, los cubrimientos por sumas de Riemann superiores e inferiores, la herramienta deslizador que permite tener la “experiencia virtual” de aproximación por cubrimientos con número muy grande de rectángulos y que podría aplicarse a rebanadas tridimensionales y el “salto al infinito”, elementos que evitan conflictos semióticos en el aprendizaje conceptual de la integral definida y facilitan la resolución de problemas aplicados a la ingeniería. Esta experiencia se hace posible manipulando las applets construidas para tal fin y disponibles en el blog que se refiere en el Anexo VI. Nuestro estudio propone una alternativa a la enseñanza tradicional que se basa en conceptualizar la integral definida mediante definición o como primitiva de una función, reduciendo el estudio a aplicar algoritmos y procesos algebraicos en la resolución de ejercicios que despiertan en los estudiantes interés por procesos memorísticos y mecánicos, despreciando el aprendizaje de conceptos matemáticos (Salinas & Alanis, 2009, citados en Argentina, 2019). En nuestro trabajo orientamos el conocimiento estrechamente a la resolución de problemas, como lo estima Douady (1986), citado en Nitti y Álvarez (2014). Para la elección de los componentes de la práctica considerada consideramos los textos de Larson y Stewart, muy usados en la enseñanza del cálculo integral y de los cuales no solo se tomaron algunos ejercicios y problemas, sino también aspectos teórico-prácticos coherentes con nuestro estudio (Larson y Edwards, 2011), (Stewart, 2018). En nuestro estudio conceptualizamos la integral definida desde una posición independiente de la derivada, vía aproximaciones por cubrimientos finitos que llevan a límite al infinito de sumas superiores o inferiores de Riemann, contando con el software GeoGebra para salvar los conflictos semióticos, en el aprendizaje, que se puedan generar a causa de los infinitesimales utilizados, el infinito, convergencia de series, entre otras y que permitan aprendizajes significativos de cálculo integral a los estudiantes de ingeniería.

VI. RECOMENDACIONES

A los docentes que enseñan cálculo integral en una variable para estudiantes de ingeniería:

- Se les recomienda considerar el desarrollo histórico del conocimiento matemático sobre la integral definida y abordar su conceptualización según Riemann desde la posición de un sistema de prácticas operativas y discursivas, con problemas intramatemáticos y extramatemáticos, de los cuales emerjan los objetos matemáticos en juego, mostrando su existencia por la funcionalidad que desempeñan en el contexto, identificados y representados en diversos registros semióticos con sus respectivas transformaciones de conversión y tratamiento (que son un todo en la resolución de problemas), asumiendo las características señaladas en la teoría de Duval (1993, 2006), las consideraciones ontológicas de Pecharromán (2013, 2014) y los desarrollos teóricos ontosemióticos de Godino (2002), básicamente.
- Recomendamos el uso de software dinámico y libre como GeoGebra, bajo un plan de secuencias didácticas que viabilicen la conceptualización de integral definida y faciliten la resolución de problemas de aplicación a la ingeniería, utilizando sus vistas y herramientas (como el deslizador) para evitar conflictos semióticos en la construcción gráficas de funciones, las conversiones de registros, la visualización en tiempo real de las sumas superiores e inferiores de Riemann, la facilidad de realización del cálculo aritmético y simbólico, las aproximaciones por cubrimientos con un número muy grande de rectángulos y el “salto al infinito” yendo de la aproximación a la exactitud, creando applets que permitan tener una experiencia virtual del paso de lo discreto a lo continuo, de lo finito a lo infinito.
- Recomendamos transitar cognitivamente por las teorías que dan soporte a la didáctica de la matemática y a los trabajos científicos relacionados con la creación de entornos tecnológicos dinámicos e interactivos de aprendizaje de temas matemáticos, en particular de la integral definida.

A las instituciones de enseñanza superior que brindan los cursos de cálculo integral en una variable:

- Recomendamos desarrollar e incluir actividades de aprendizaje de la integral definida, considerando el desarrollo histórico de este conocimiento matemático, desde el método de exhaustión creado por Eudoxo, cuya utilización se evidencia en el libro XII de los “Elementos” de Euclides y en una diversidad de obras de Arquímedes, pasando por los trabajos de Leibnitz y Newton, las obras de Euler y Lagrange, hasta la integral de Riemann como ahora se concibe (Ríbnikov, 1987). Es decir considerar al cálculo integral como análisis matemático por infinitesimales.
- Recomendamos incluir en las actividades de aprendizaje entornos tecnológicos de aprendizaje, de preferencia contando con software dinámico y gratuito como Geogebra que permitan aproximarse a los conceptos, por vivencia experiencial, mediante una diversidad de representaciones de estos, resaltando las visuales y de cálculo simbólico; que estimulen los sentidos durante la edificación de nuevas estructuras mentales y que posibiliten a los usuarios expresar conceptos e ideas matemáticas (Gruszycky, Oteiza, Maras, Gruszycky y Ballés, 2014).

A los estudiantes de ingeniería que aborden el cálculo integral en una variable

- Recomendamos conseguir sus aprendizajes significativos de la integral definida desde el enfoque del cálculo integral como análisis matemático por infinitesimales, conceptualizando la integral definida y buscando la facilidad para resolver problemas de aplicación a la ingeniería desde el punto de partida de un sistema de prácticas de las cuales emerjan los objetos matemáticos expresados por sus representaciones manifestadas con la movilización de una diversidad de registros de representación semiótica con sus respectivas transformaciones de conversión y tratamiento y la coordinación entre ellos.

REFERENCIAS

Aranda, C. y Callejo, M. Luz. (2010). Un experimento de enseñanza para la construcción del concepto de integral definida usando un programa de geometría dinámica. Recuperado de: https://www.semcv.org/images/stories/xjornades/materials/C19_Aranda_Callejo.pdf

Argentina, J. (2019). La integral definida como área bajo una curva en un entorno computacional. Revista científica de FAREM-Estelí, 8(30), 3-19. Doi <http://doi.org/10.5377/farem.v0i30.7883>

Damisa, C. y Ponzetti, S. (2015). Los objetos matemáticos y sus representaciones: ¿Lo que ves es lo que es? Documentos del V congreso uruguayo de educación matemática. 136-143. Recuperado de <https://semur.edu.uy/curem5/actas/>

D'Amore, B. (2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Uno, (35), 90-106. Doi [10.14483/23448350.419](http://doi.org/10.14483/23448350.419)

D'Amore, B., Fandiño, M., Iori, M., y Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la “paradoja cognitiva de Duval”. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18(2), 177-212. Recuperado de <http://relime.org/articulos/1802/201502b/index.html>

De Carvalho, S. y Schirlo, A. (2014). Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel: reflexões para o ensino de Física ante a nova realidade social. Imagens de educação, 4(1), 36-42. Doi: <http://dx.doi.org/10.4025/imagenseduc.v4i1.22694>

Duval, R. (1993), Trad. Moretti, M. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. 7(2), 266-297. Doi: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>

Duval, R. (2006), Trad. Quesada, H. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La gaceta de la RSME, 9(1), 143-168. Recuperado de <http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546>

Ely, R. (2017). Definite integral registers using infinitesimals. The journal of mathematical behavior, 48, 152-157. Doi <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.002>

Espinoza, E. (2012). Análisis matemático 2. (6a ed.). Lima:educperú

- Flores, J. (2015). *Educación matemática en el Perú: avances y perspectivas*. México D. F. Publisher: Secretaría Técnica del Instituto Politécnico Nacional de México, pp 257--276
- Font, V., Godino, J. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the learning of mathematics*, 27 (2), 1-7. Recuperado de <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/617%20%202007%20FLM.pdf>
- Font, V., Godino, J. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97-124. Doi 10.1007/s10649-012-9411-0
- Gatica, N. y Ares, O. (2011). Una propuesta didáctica utilizando las nuevas tecnologías para la enseñanza de la integral como límite de sucesiones. *Epsilon-revista de educación matemática*, 28(2), pp. 77-88. Recuperado de https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es/epsilon/files/%5Bfield_volumen-formatted%5D/revista78_7.pdf
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des mathématiques*, 22 (2,3), 237-284. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf
- Gruszycky, A., Oteiza, L., Maras, P., Gruszycky, L. y Ballés, H. (2014). Geogebra y los sistemas de representación semióticos. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 27, 2169-2176- Recuperado de <https://clame.org.mx/uploads/actas/alme27.pdf>
- Martínez, M. y Hernández, L. (2016). Importancia de las representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. *Saberes y ciencias*. (50). Recuperado de http://saberesyciencias.com.mx/category/numeros/numero_50/
- Hernandez, A., Cervantes, J., Ordoñez, J. y García, M. (2017). TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICA. ResearchGate. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/315814323_TEORIA_DE_REGISTROS_DE_REPRESENTACIONES_SEMIOTICA
- Hibbeler, R. (2010). *Estática*. (12ª ed.). México: PEARSON.

Larson, R. y Edwards, B. (2011). Cálculo. (9ª ed.). México: Mc Graw-Hill.

Stewart, J. (2018). Cálculo de una variable, trascendentes tempranas. (8ª ed.). México: CENAGE.

Lee, D. y Martínez, R. (2014). A study of semiotic registers in the development of the definite integral of functions of two and three variables. *International Journal of science and mathematical education*, 12(4), 883-916. doi: 10.1007/s10763-013-9437-5

López, F., Nieto, N., Antolín, A. y López, P. (2013). Arribando a la integral definida con el geogebra. *Culcyt / Educación*, 49(1), 60-66. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7059412.pdf>

Nardín, A., Álvarez A, Blanco, R., Bueno, S. y Mora, J. (2012). Registros semióticos y enseñanza del tema integrales. *Comité latinoamericano de matemática educativa*. 25, 515-523. Recuperado de <https://core.ac.uk/download/pdf/20482751.pdf>

Nitti, L. y Álvarez, M. (2014). Integral definida y función integral. Exploración, formalismo e intuición en los futuros profesores de matemática. *Yupana*, 7(13), 69-83. Doi [10.14409/yy.v1i7.4263](https://doi.org/10.14409/yy.v1i7.4263)

Oviedo, L., Kanashiro, A., Bnzaquen, M. y Gorrochátegui, M. (2012). Los registros semióticos de representación. *Aula universitaria*, (13), 29-36. Doi; <https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112>

Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de las ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 31(3), 121-134. Recuperado de <https://core.ac.uk/download/pdf/38990814.pdf>

Pecharromán, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Educación matemática*, 26(2), 111-133. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40532665005>

Penalva, M. y Torregrosa, G. (2001). Representación y aprendizaje de las matemáticas.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas*. (2a ed.). Moscú: Mir

Scritpa in memoriam. 649-658. Recuperado de: <https://docplayer.es/20882265-Representacion-y-aprendizaje-de-las-matematicas-m-carmen-penalva-german-torregrosa.html>

Tipler, P. y Mosca, G. (2010). Física para la ciencia y la tecnología. (6ª ed.). Barcelona: Reverté.

Turégano, P. (1997). El aprendizaje del concepto de integral. SUMA, 26, 39-52. Recuperado de <http://revistasuma.es/sites/revistasuma.es/IMG/pdf/26/039-052.pdf>

ANEXO I

PRÁCTICA

Elegimos los problemas de la práctica (junto con sus correspondientes figuras), de los textos de Stewart (2018) aquí considerado como libro 1, Larson (2011) libro 2 y Hibbeler (2010) como libro 3. De tal manera que cada problema tendrá la referencia: Número correspondiente en la práctica (Número del problema en el libro del cual se sacó y página de este libro donde se encuentra el problema).

PROBLEMAS INTRAMATEMÁTICOS

1. (3 de 1, p. 375)

- (a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$, de $x=1$ a $x=2$, usando cuatro rectángulos de aproximación y los puntos finales derechos. Trace la curva y los rectángulos de aproximación. ¿Su estimación es una subestimación o una sobreestimación?
- (b) Repita el inciso (a), con los puntos finales izquierdos.

2. (26 de 2, p. 268)

Considerar la función $g(x) = x^2 + x - 4$

- (a) Estimar el área entre la gráfica de g y el eje x entre $x=2$ y $x=4$, usando rectángulos y puntos terminales derechos. Bosquejar la gráfica y los rectángulos.
- (b) Repetir el apartado (a) usando puntos terminales izquierdos.

3. (4 de 1, p. 375)

- (a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = \sin x$ de $x=0$ a $x = \frac{\pi}{2}$ usando cuatro rectángulos de aproximación y puntos finales derechos. Trace la gráfica y los rectángulos. ¿Su estimación es una sobreestimación o una subestimación?
- (b) Repita el inciso (a) con los puntos finales izquierdos.

4. (27 al 32 de 2, p. 268)

En los ejercicios abajo dados, usar los puntos terminales izquierdo y derecho y el número de rectángulos dado para encontrar dos aproximaciones del área de la región entre la gráfica de la función y el eje x sobre el intervalo dado.

(a) $f(x) = 2x + 5$, $[0, 2]$, 4 rectángulos.

(b) $f(x) = 9 - x$, $[2, 4]$, 6 rectángulos.

(c) $g(x) = 2x^2 - x - 1$, $[2, 5]$, 6 rectángulos.

(d) $g(x) = x^2 + 1$, $[1, 3]$, 8 rectángulos.

(e) $f(x) = \cos x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 4 rectángulos.

(f) $f(x) = \sin x$, $[0, \pi]$, 6 rectángulos.

5. (6 de 1, p. 375)

(a) Trace la gráfica de la función $f(x) = x - 2 \ln x$, $1 \leq x \leq 5$

(b) Estime el área bajo la gráfica de f con cuatro rectángulos de aproximación y considerando que los puntos muestra son (i) los puntos finales derechos y (ii) los puntos medios. En cada caso, trace la curva y los rectángulos.

(c) Mejore sus estimaciones del inciso (b) utilizando ocho rectángulos.

6. (1 al 6 de 2, p. 267)

En los ejercicios del (1) al (6), encontrar la suma. Usar una herramienta informática para verificar el resultado.

$$\begin{array}{llll} (1) \sum_{i=1}^6 (3i + 2) & (2) \sum_{k=5}^8 k(k - 4) & (3) \sum_{k=0}^4 \frac{1}{k^2 + 1} & (4) \sum_{j=4}^7 \frac{2}{j} \\ (5) \sum_{k=1}^4 c & (6) \sum_{i=1}^4 \left[(y-1)^2 + (i+1)^3 \right] & & \end{array}$$

7. (7, 9, 10 y 12 de 2, p. 267)

$$(7) \quad \frac{1}{5(1)} + \frac{1}{5(2)} + \frac{1}{5(3)} + \cdots + \frac{1}{5(11)}$$

$$(9) \quad \left[7\left(\frac{1}{6}\right) + 5 \right] + \left[7\left(\frac{2}{6}\right) + 5 \right] + \cdots + \left[7\left(\frac{6}{6}\right) + 5 \right]$$

$$(10) \quad \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{2}{4}\right)^2 \right] + \cdots + \left[1 - \left(\frac{4}{4}\right)^2 \right]$$

$$(12) \quad \left[1 - \left(\frac{2}{n} - 1\right)^2 \right] \left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left[1 - \left(\frac{2n}{n} - 1\right)^2 \right] \left(\frac{2}{n}\right)$$

8. (17, 19, 20 y 22 de 2, p. 267)

En los ejercicios, utilizar las propiedades de la notación sigma y el teorema 4.2 para calcular la suma. Utilizar la función de suma de una herramienta informática para verificar el resultado.

$$(17) \quad \sum_{i=1}^{24} 4i \quad (19) \quad \sum_{i=1}^{20} (i-1)^2 \quad (20) \quad \sum_{i=1}^{10} (i^2 - 1) \quad (22) \quad \sum_{i=1}^{10} i(i^2 + 1)$$

9. (23 y 24 de 2, p. 267)

$$(23) \quad \sum_{i=1}^{20} (i^2 + 3) \quad (24) \quad \sum_{i=1}^{15} (i^3 - 2i)$$

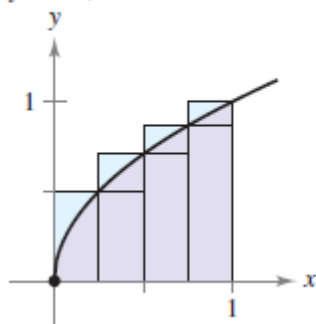
10. (37, 39 y 40 de 2, p. 268)

$$(37) \quad s(n) = \frac{81}{n^4} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right] \quad (39) \quad s(n) = \frac{18}{n^2} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \quad (40) \quad s(n) = \frac{1}{n^2} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]$$

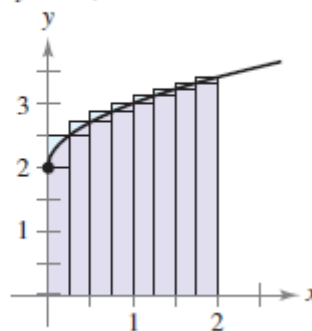
11. (41 al 44 de 2, p. 268)

En los ejercicios del 41 al 44, utilizar las sumas superiores e inferiores para aproximar el área de la región empleando el número dado de subintervalos (de igual ancho).

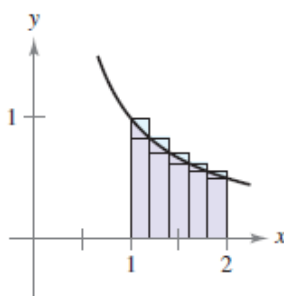
41. $y = \sqrt{x}$



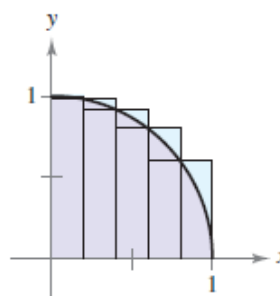
42. $y = \sqrt{x} + 2$



43. $y = \frac{1}{x}$



44. $y = \sqrt{1 - x^2}$



12. (45 y 47 de 2, p. 268)

En los ejercicios 45 y 47 utilizar las fórmulas de suma con notación sigma para reescribir la expresión sin la notación sigma. Emplear el resultado para determinar la suma correspondiente a $n=10$, 100, 1000 y 10000.

(45) $\sum_{i=1}^n \frac{2i+1}{n^2}$ (47) $\sum_{k=1}^n \frac{6k(k-1)}{n^3}$

13. (49, 50, 51 y 53 de 2, p. 268)

En los ejercicios 49, 50, 51 y 53, encontrar una fórmula para la suma de los n términos. Emplear la fórmula para determinar el límite cuando $n \rightarrow \infty$.

(49) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{24i}{n^2}$ (50) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n} \right) \left(\frac{2}{n} \right)$ (51) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^3} (i-1)^2$

$$(53) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n} \right) \left(\frac{2}{n} \right)$$

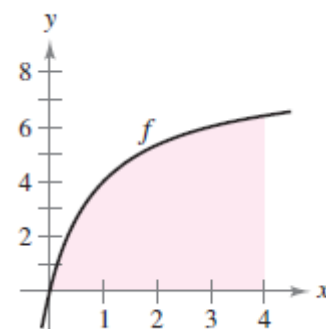
14. (85 de 2, p. 269)

Razonamiento gráfico. Considerar la región delimitada por la gráfica de $f(x) = \frac{8x}{x+1}$

, $x=0$, $x=4$ y $y=0$ como se muestra en la figura.

(a) Redibujar la figura y trazar y sombrear los rectángulos que representan a la suma inferior cuando $n=4$. Encontrar esa suma inferior.

(b) Redibujar la figura y trazar y sombrear los rectángulos que representan la suma superior cuando $n=4$. Determinar esa suma superior.



(c) Redibujar la figura y trazar y sombrear los rectángulos cuyas alturas se determinan mediante los valores funcionales en el punto medio de cada subintervalo cuando $n=4$. Determinar esta suma utilizando la regla del punto medio.

(d) Verificar las siguientes fórmulas al aproximar el área de la región utilizando n intervalos de igual ancho.

$$\text{Suma inferior: } s(n) = \sum_{i=1}^n f \left[\left(i-1 \right) \frac{4}{n} \right] \left(\frac{4}{n} \right)$$

$$\text{Suma superior: } S(n) = \sum_{i=1}^n f \left[\left(i \right) \frac{4}{n} \right] \left(\frac{4}{n} \right)$$

$$\text{Regla del punto medio: } M(n) = \sum_{i=1}^n f \left[\left(i - \frac{1}{2} \right) \frac{4}{n} \right] \left(\frac{4}{n} \right)$$

(e) Utilizar una herramienta de graficación y las fórmulas del apartado (d) para completar la tabla:

n	4	8	20	100	200
$s(n)$					
$S(n)$					
$M(n)$					

- (f) Explicar por qué $s(n)$ aumenta y $S(n)$ disminuye para valores recientes de n , como se muestra en la tabla en el apartado (e).

PROBLEMAS EXTRAMATEMÁTICOS

Densidad de una varilla

15. (63 de 1, pg.410)

Se da la densidad lineal de una varilla de longitud de 4 m mediante $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ medida en kg/m, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Calcular la masa total de la varilla.

Caudal de un líquido

16. (64 de 1, pg.410)

Del fondo de un tanque de almacenamiento fluye agua con una rapidez de $V(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, donde $0 \leq t \leq 50$. Encuentre la cantidad de agua que fluye del tanque durante los primeros 10 minutos.

Trabajo de un resorte

17. (9 de 1, pg.459)

Para estirar un resorte desde su longitud natural de 30 cm hasta una longitud de 42 cm, se necesitan 2 J de trabajo. Dada la información, resolver:

- (a) Calcular el trabajo necesario para estirar el resorte desde 35 hasta 42 cm.
- (b) ¿Qué distancia más allá de su longitud natural, el resorte mantendrá una fuerza de 30 N?

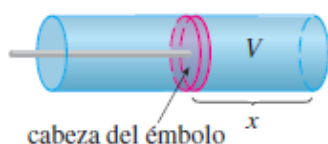
Trabajo de un gas

18. (29 de 1, pg.460)

Cuando el gas se expande en un embolo cilíndrico de radio r , la presión en cualquier momento dado es una función del volumen $P = P(V)$. La fuerza que ejerce el gas sobre el embolo es el producto de la presión por el área: $F = \pi r^2 P$.

(a) Formular el modelo matemático que represente el trabajo que realiza el gas cuando el volumen se expande desde un volumen V_1 al volumen V_2 .

(b) Un ingeniero mecánico modela el comportamiento de la presión y determina un crecimiento lineal de la presión (Pa) respecto al volumen (m^3) mediante el modelo: $P(V) = 0.1V + 1.9$. Calcular el trabajo realizado por el gas de un émbolo de 10 cm de radio que se expande longitudinalmente en 50 cm.



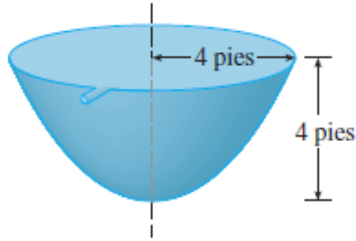
Trabajo Mecánico

19. (18 de 1, pg.459)

Un cubo que pesa 4 Kg y una soga de peso insignificante se usan para extraer agua de un pozo de 80 m de profundidad. El cubo se llena con 40 Kg de agua y se jala hacia arriba con una rapidez de 2 m/s, pero se sale por un agujero que tiene el cubo, con una rapidez de 0.2 Kg/s. Calcular el trabajo hecho al jalar el cubo hasta la boca del pozo.

20. (29 de 1, pg.467)

Un tanque lleno de agua tiene la forma de un paraboloide de revolución, como se ve en la figura:

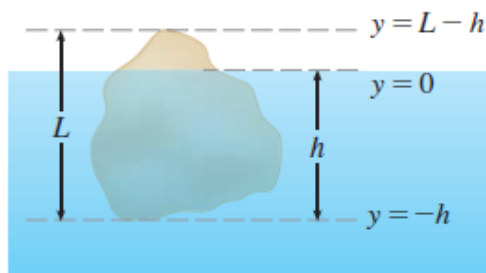


- (a) Si su altura es de 4 pies y el radio en la parte superior es de 4 pies, encuentre el trabajo necesario para bombear el agua fuera del tanque.
- (b) Después que se han realizado 4000 lb-pie de trabajo, ¿cuál es la profundidad del agua restante en el tanque?

Principio de Arquímedes

21. (11 de 2, pg.518)

El principio de Arquímedes establece que la fuerza de flotación (empuje) de un objeto parcial o totalmente sumergido en un líquido es igual al peso del líquido que desaloja el objeto. Por lo tanto, en el caso de un objeto de densidad ρ_0 que flota parcialmente sumergido en un líquido de densidad ρ_L la fuerza de flotación es: $F = \rho_L g \int_{-h}^0 A(y) dy$, donde g es la aceleración debido a la gravedad y $A(y)$ es el área de la sección transversal del objeto. El peso del objeto está dado por $W = \rho_0 g \int_{-h}^{L-h} A(y) dy$.



- (a) Formular matemáticamente el modelo que representa el porcentaje del objeto por arriba de la superficie del líquido.
- (b) La densidad del hielo es 917 Kg/m^3 y la densidad del agua del mar es 1030 Kg/m^3 . ¿Qué porcentaje del volumen de un iceberg sobresale el agua?

(c) Una esfera de 0.4 m de radio y peso insignificante flota en un enorme lago de agua dulce. Calcular el trabajo que se requiere para sumergir del todo la esfera, sabiendo que la densidad del agua es de 1000 Kg/m^3 .

22. (16 de 1, pg.566)

Una prensa está inclinada 30° desde la vertical y tiene la forma de un trapecio isósceles de 100 m de ancho en la parte superior y 50 m de ancho en el fondo y con una altura inclinada de 70 m. Encontrar la fuerza hidrostática sobre la prensa cuando está llena de agua.

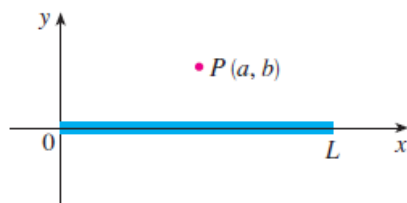
Campo Eléctrico

23. (42 de 1, pg.492)

Una varilla cargada de longitud L produce un campo eléctrico en un punto $P(a, b)$ dado por:

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + b^2)^{3/2}} dx, \text{ donde } \lambda \text{ es la densidad de carga por unidad}$$

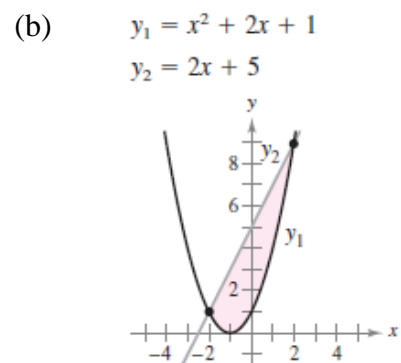
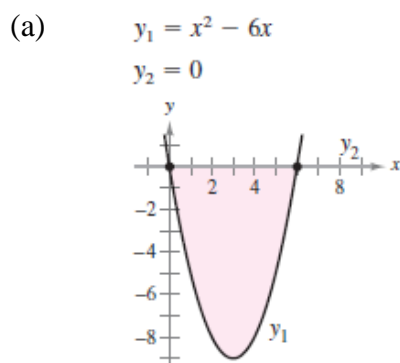
de longitud de la varilla y ϵ_0 es la permeatividad del espacio libre. Determinar una expresión para campo eléctrico $E(P)$.



Cálculo de Áreas

24. (1-2, 17-18 de 2, pg.454)

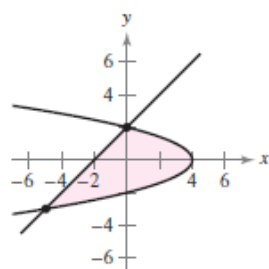
Calcular el área debajo de las regiones sombreadas.



(c)

$$x = 4 - y^2$$

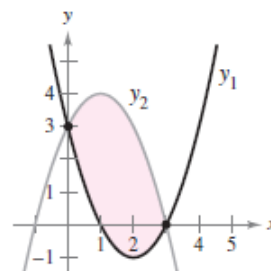
$$x = y - 2$$



(d)

$$y_1 = x^2 - 4x + 3$$

$$y_2 = -x^2 + 2x + 3$$



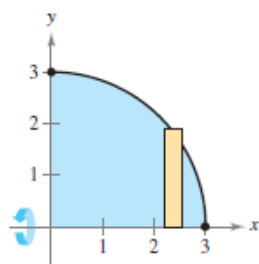
Cálculo de Volúmenes

25. (1-6 de 2, pg.465)

Formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje indicado.

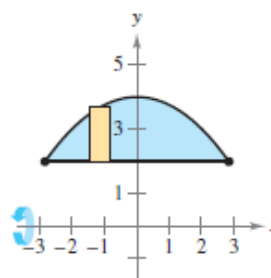
(a)

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$



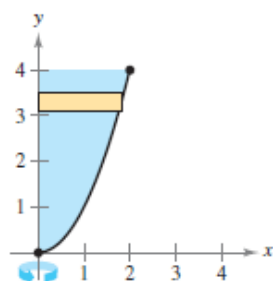
(b)

$$y = 2, \quad y = 4 - \frac{x^2}{4}$$



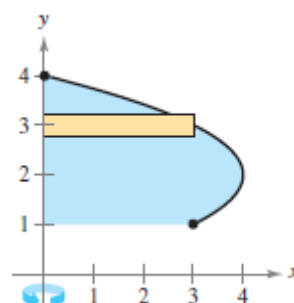
(c)

$$y = x^2$$



(d)

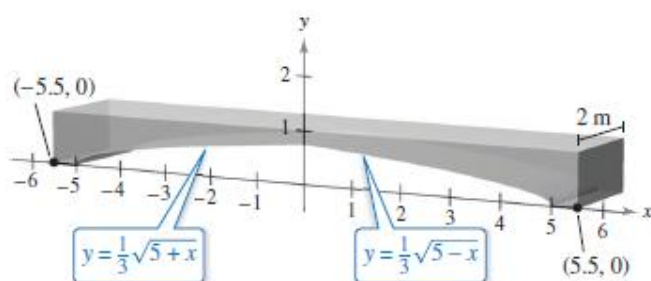
$$x = -y^2 + 4y$$



Diseño de construcción

26. (97 de 2, pg.457)

Las secciones de concreto (hormigón) para un nuevo edificio tienen las dimensiones (m) y la forma mostrada en la figura:



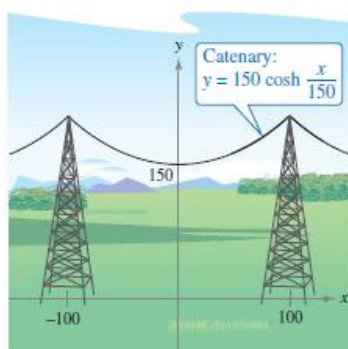
- (a) calcular el área de la cara adosada en el sistema de coordenadas rectangulares
- (b) calcular el volumen de concreto en una de las secciones multiplicando el área obtenida en el apartado (a) por 2 m.
- (c) 1 m³ de concreto pesa 5000 Kg. Encontrar el peso de la sección.

Longitud de Arco

27. (5 de 2, pg.481)

Un cable eléctrico cuelga entre dos torres que están a 200 m de distancia, como se muestra en la figura. El cable toma la forma de una catenaria cuya ecuación es:

$$y = 150 \cosh \frac{x}{150} = 75 \left(e^{x/150} + e^{-x/150} \right)$$

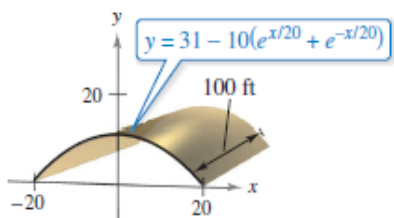


Encontrar la longitud de arco del cable entre las dos torres.

Área de un techo

28. (32 de 2, pg.486)

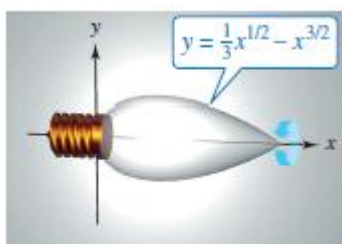
Un granero tiene 100 m de largo y 40 m de ancho. Una sección transversal del tejado es una catenaria invertida. Encontrar el área del techo del granero.



Diseño de una bombilla

29. (65 de 2, pg.488)

Una bombilla ornamental se diseña al girar la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}$, donde $0 \leq x \leq 1/3$, alrededor del eje X, donde las coordenadas X, Y están medidas en m. Calcular el área superficial de la bombilla y usar el resultado para aproximar la cantidad de vidrio necesaria para hacer la bombilla. (Suponer que el vidrio tiene un espesor aproximado de 0.015 m).



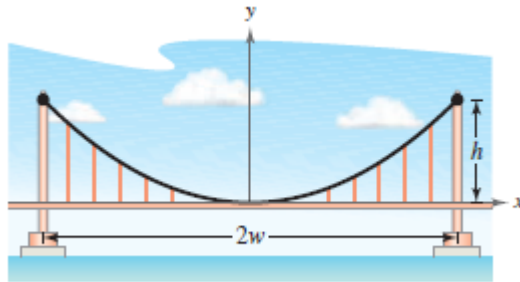
Puente suspendido

30. (69 de 2, pg.488)

Un cable para un puente suspendido tiene la forma de una parábola con la ecuación $y = kx^2$. Sea 'h' la medida para representar la altura del cable de su punto más bajo a su punto más alto y sea '2w' la anchura total del puente.

(a) Formular el modelo matemático para calcular la longitud del cable.

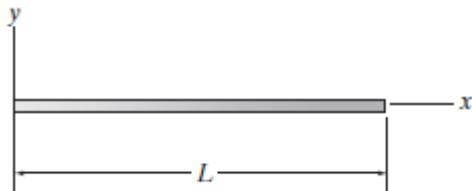
(b) El cable en suspensión está hecho de acero estructural cuyo costo es de \$3.66 el Kg y la densidad lineal del acero es de 7.8 Kg/m. Hacer un presupuesto para costear la construcción de un puente que conecta una distancia de 100 m y cuya altura máxima es proyectada para 35 m.



Centro de Masa

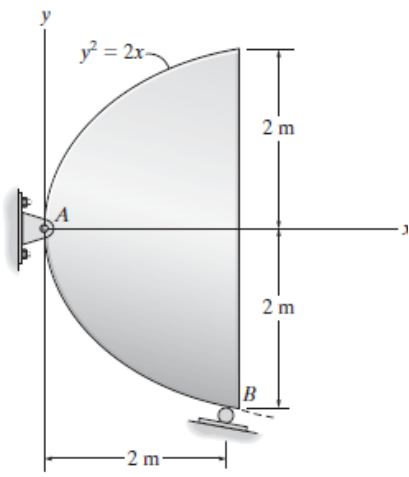
31. (9.4 de 3, pg.461)

Un ingeniero civil tiene el modelo matemático de una columna, sobre la cual debe determinar la ubicación de un punto de estabilidad sobre la cual se sustentará un peso. Localizar el centro de masa de la barra recta si su masa por unidad de longitud está dada por $\rho = m_0(1 + x^2 / L^2)$.



32. (9.30 de 3, pg.467)

Una placa de acero tiene un espesor de 0.3 m y una densidad de 7850 Kg/m³. Esta placa será usada como soporte de estabilidad de carga. Determinar la ubicación del mejor punto de estabilidad para el soporte de la carga.



ANEXO II

Herramienta de análisis

Ficha de análisis de datos

CONCEPTO	REGISTRO	REPRESENTACIÓN	OBJETO REPRESENTANTE	OBJETO REPRESENTADO	FUNCIONALIDAD	CONVERSIONES	TRATAMIENTOS

Concepto: Resultado de la coordinación de los registros de representación semiótica.

Registro: Sistema semiótico en el cual se representa un objeto matemático.

Representación: conjunto icónico que se coloca en lugar de un objeto matemático.

Objeto representante: Cadena simbólica que representa al objeto matemático.

Objeto representado: Objeto matemático que emerge de un componente de la práctica.

Funcionalidad: función que desempeña el objeto matemático en el contexto.

Conversiones: Cambio de registro de representación semiótica.

Tratamientos: Cambios de una representación en un mismo registro semiótico.

ANEXO III

Ficha de análisis de los registros de representación semiótica, que emergen de la resolución del ejercicio 5 de la práctica.

CONCEPTO	REGISTRO	REPRESENTACIÓN	OBJETO REPRESENTANTE	OBJETO REPRESENTADO	FUNCIONALIDAD	CONVERSIONES	TRATAMIENTOS
Función	Algebraico-geométrico	$R_1^3(O_1)$ y $R_1^2(O_1)$	$O_1: f(x) = x - 2\ln(x)$	función	Relacionar magnitudes	$R_1^3(O_1) \rightarrow R_1^2(O_1)$ Automático con GeoGebra	
Área aproximada	geométrico	$R_2^2(O_2)$	O_2 : Área aproximada de S_1 por cubrimiento 4R	Área de 4R resultantes de las sumas sup. De Riemann	Aproximar, por exceso, al área de S_1 por cubrimiento 4R	$R_2^3(O_2) \rightarrow R_2^2(O_2)$ automático con GeoGebra	
Área aproximada	Numérico	$R_1^4(O_2)$	O_2 : Área aproximada de S_1 por cubrimiento 4R	Suma de los valores numéricos de las áreas de los 4R por sumas sup.	Aproximar numéricamente por exceso, las áreas de 4R al		Varios, hechos manualmente

				De Riemann	área de S_1		
Área aproximada	simbólico	$R_1^5(O_2)$	O_2 : Área aproximada de S_1 por cubrimiento 4R	Suma expandida como expresión simbólica de las áreas de los 4R	Aproximar, por exceso, al área de S_1	$R_1^4(O_2) \rightarrow R_1^5(O_2)$	
Área aproximada	Algebraico-gráfico	$R_1^3(O_3)$ y $R_1^2(O_3)$	O_3	Área aproximada de la región S_I por cubrimiento con 4R resultantes de la regla de los puntos medios	Aproximar al área de S_I por el área de una cobertura 4R resultantes de la regla de los puntos medios	$R_1^3(O_3) \rightarrow R_1^2(O_3)$ Automático con GeoGebra.	
Área aproximada	Numérico	$R_1^4(O_3)$	O_3	Área aproximada de la región S_I por cubrimiento con 4R resultantes de la regla de los puntos medios	Aproximar al área de S_I por cubrimiento de 4R resultantes de la regla de los puntos medios	$R_1^2(O_3) \rightarrow R_1^4(O_3)$	Cálculo del valor numérico del área de los 4R de la cubrimiento

				puntos medios			
Área aproximada	Simbólico	$R_1^5(O_3)$	O_3	Área aproximada de la región S_I por cubrimiento con 4R resultantes de la regla de los puntos medios	Aproximar, mediante suma expandida, al área de S_I por el área del cubrimiento 4R resultante de la regla de los puntos medios	$R_1^4(O_3) \rightarrow R_1^5(O_3)$	
Área aproximada	Simbólico	$R_2^5(O_3)$	O_3	Área aproximada de la región S_I por cubrimiento con 4R resultantes de la regla de los puntos medios	Aproximar, mediante suma con notación sigma, al área de S_I por el área de la cubrimiento de 4R resultantes de la regla de los	$R_1^5(O_3) \rightarrow R_2^5(O_3)$	

					puntos medios		
Área aproximada	Algebraico y gráfico	$R_1^3(O_4)$ y $R_1^2(O_4)$	O_4	objeto área aproximada a la de la región S_1 , por cubrimiento con 8R resultantes de las sumas inferiores de Riemann	Aproximar al área de S_1 por el área de 8R resultantes de las sumas superiores de Riemann	$R_1^3(O_4) \rightarrow R_1^2(O_4)$ Automática con GeoGebra	
Área aproximada	Numérico	$R_1^4(O_4)$	O_4	Área aproximada al área de S_1 por cubrimiento con 8R resultantes de las sumas superiores de Riemann	Aproximar al área de S_1 , por exceso, con el área de C8R resultantes de las sumas superiores de Riemann	$R_1^2(O_4) \rightarrow R_1^4(O_4)$	Cálculo numérico de la suma de las áreas de los rectángulos de la cubrimiento por exceso de S_1

Área aproximada	Simbólico	$R_1^5(O_4)$	O_4	Área aproximada, por suma expandida, de la región S_I por cubrimiento con 8R resultantes de las sumas superiores de Riemann	Aproximar el área, por exceso, de la cubrimiento de 8R al área de S_1	$R_1^4(O_4) \rightarrow R_1^5(O_4)$	
Área aproximada	Simbólico	$R_2^5(O_4)$	O_4	Área aproximada, suma con notación sigma, a la región S_I por cubrimiento con 8R resultantes de las sumas superiores de Riemann	Aproximar, por exceso, el área de los 8R de la cubrimiento resultante de las sumas superiores de Riemann, al área de S_1	Obtención de la suma con notación sigma, de la suma expandida, por cálculo simbólico	$R_1^5(O_4) \rightarrow R_2^5(O_4)$

Área aproximada	Algebraico y gráfico	$R_1^3(O_5)$ y $R_1^2(O_5)$	O_5	Área aproximada al área de la región S_1 , por cubrimiento con 8R resultantes de la regla de los puntos medios	Aproximar al área de S_1 con el área de C8R resultantes de la regla de los puntos medios	$R_1^3(O_5) \rightarrow R_1^2(O_5)$	Automáticos con GeoGebra
Área aproximada	Numérico	$R_1^4(O_5)$	O_5	Área aproximada, obtenida con cálculo numérico, al área de la región S_1 , por cubrimiento con 8 rectángulos resultantes de la regla de los puntos medios	Aproximar numéricamente al área de S_1 por el área de 8R resultantes de la regla de los puntos medios	$R_1^2(O_5) \rightarrow R_1^4(O_5)$	Cálculo numérico de la suma de las áreas de los rectángulos de la cubrimiento obtenida por la regla de los puntos medios

Área aproximada	Simbólico	$R_1^5(O_5)$	O_5	Área aproximada al área de la región S_1 , por cubrimiento con 8R resultantes de la regla de los puntos medios, calculada simbólicamente como suma expandida	Aproximar, por suma expandida, el área de C8R obtenidos por la regla de los puntos medios al área de la región S_I	$R_1^4(O_5) \rightarrow R_1^5(O_5)$	Cálculo simbólico de la suma de las áreas de los 8R obtenidos con la regla de los puntos medios, como suma expandida
Área aproximada	Simbólico	$R_2^5(O_5)$	O_5	Área aproximada al área de la región S_1 , por cubrimiento con 8R, resultantes de la regla de los puntos medios, calculada	Aproximar, por suma con notación sigma, el área de C8R obtenidos por la regla de los puntos medios, al área de la región	Obtención de la suma con notación sigma, de la suma expandida, por cálculo simbólico	$R_1^5(O_5) \rightarrow R_2^5(O_5)$

				simbólicamente como suma con notación sigma	S_I		
Área aproximada	Algebraico- gráfico	$R_1^3(O_6)$ y $R_1^2(O_6)$	O_6	Área aproximada al área de la región S_1 , por cubrimiento con 4R resultantes de las sumas inferiores de Riemann	Aproximar al área de S_1 con el área de 4R resultantes de las sumas inferiores de Riemann	$R_1^3(O_6) \rightarrow R_1^2(O_6)$	
Área aproximada	Numérico	$R_1^4(O_6)$	O_6	Área aproximada, obtenida con cálculo numérico, al área de la región S_1 , por cubrimiento con 4R resultantes de las sumas	Aproximar numéricamente al área de S_1 por el área de C4R resultantes de la regla de las sumas inferiores de Riemann	$R_1^2(O_6) \rightarrow R_1^4(O_6)$	Cálculo numérico de la suma de las áreas de los 4R del cubrimiento obtenida por las sumas inferiores de Riemann

				inferiores de Riemann			
Área aproximada	Simbólico	$R_1^5(O_6)$	O_6	Área aproximada al área de la región S_1 , por cubrimiento con 4R resultantes de las sumas inferiores de Riemann, calculada simbólicamente como suma expandida	Aproximar, por suma expandida, el área de C4R obtenidos por las sumas inferiores de Riemann, al área de la región S_I	$R_1^4(O_6) \rightarrow R_1^5(O_6)$	Cálculo simbólico de la suma de las áreas de los 4R obtenidos de las sumas inferiores de Riemann, como suma expandida
Área aproximada	Simbólico	$R_2^5(O_6)$	O_6	Área aproximada al área de la región S_1 , por cubrimiento con	Aproximar, por suma con notación sigma, el área de C4R	Obtención de la suma con notación sigma, de la suma expandida, por	$R_1^5(O_6) \rightarrow R_2^5(O_6)$

				4R resultantes de las sumas inferiores de Riemann, calculada simbólicamente como suma con notación sigma	obtenidos por las sumas inferiores de Riemann, al área de la región S_I	cálculo simbólico	
Área aproximada	Algebraico-gráfico	$R_1^3(O_7)$ y $R_1^2(O_7)$	O_7	Área aproximada al área de la región S_1 , por cubrimiento con 8R resultantes de las sumas inferiores de Riemann	Aproximar al área de S_1 con el área de C8R resultantes de las sumas inferiores de Riemann	$R_1^3(O_7) \rightarrow R_1^2(O_7)$	
Área aproximada	Numérico	$R_1^4(O_7)$	O_7	Área aproximada, obtenida con cálculo numérico,	Aproximar numéricamente al área de S_1 por el	$R_1^2(O_7) \rightarrow R_1^4(O_7)$	Cálculo numérico de la suma de las áreas de los 8R de

				al área de la región S_1 , por cubrimiento con 8R resultantes de las sumas inferiores de Riemann	área de C8R resultantes de las sumas inferiores de Riemann		la cubrimiento obtenida por las sumas inferiores de Riemann
Área aproximada	Simbólico	$R_1^5(O_7)$	O_7	Área aproximada al área de la región S_1 , por cubrimiento con 8R resultantes de las sumas inferiores de Riemann, calculada simbólicamente como suma expandida	Aproximar, por suma expandida, el área de C8R obtenidos por las sumas inferiores de Riemann, al área de la región S_1	$R_1^4(O_7) \rightarrow R_1^5(O_7)$	Cálculo simbólico de la suma de las áreas de los 8R obtenidos de las sumas inferiores de Riemann, como suma expandida

Área aproximada	Simbólico	$R_2^5(O_7)$	O_7	Área aproximada al área de la región S_1 , por cubrimiento con 8R resultantes de las inferiores de Riemann, calculada simbólicamente como suma con notación sigma	Aproximar, por suma con notación sigma, el área de C8R obtenidos por las sumas inferiores de Riemann, al área de la región S_I		
Área aproximada	Simbólico	$R_1^5(O_8)$	O_8	Área aproximada al área de la región S_1 , por cubrimiento con nR, resultantes de las sumas inferiores de Riemann y	Aproximar, por suma expandida, el área de CnR obtenidos por las sumas inferiores de Riemann, al área de la región S_I		

				calculada simbólicamente como suma expandida			
Área aproximada	Simbólico	$R_2^5(O_8)$	O_8	Área aproximada al área de la región S_1 , por cubrimiento con nR, resultantes de las sumas inferiores de Riemann y calculada simbólicamente como suma con notación sigma	Aproximar, por suma con notación sigma, el área de CnR obtenidos por las sumas inferiores de Riemann, al área de la región S_I		$R_1^5(O_8) \rightarrow R_2^5(O_8)$
Área exacta	Simbólico	$R_2^5(O_9)$	O_9	Área exacta de S_1 representada como el límite de	Calcular el área exacta de S_1 como límite de una		$R_2^5(O_8) \rightarrow R_2^5(O_9)$

				una suma infinita	suma infinita		
Área exacta	Simbólico	$R_3^5(O_9)$	O_9	Área exacta de S_1 representada como la integral definida de f sobre [1, 5]	Calcular el área exacta de S_1 como la integral de f sobre [1, 5]		$R_2^5(O_9) \rightarrow R_3^5(O_9)$
Área exacta	Algebraico	$R_1^3(O_9)$	O_9	Área exacta de S_1 representada como la integral definida de f sobre [1, 5]	Calcular el área exacta de S_1 como la integral de f sobre [1, 5]		Integración por partes y aplicación del segundo teorema fundamental del cálculo

ANEXO IV

Análisis de los registros de representación semiótica movilizados para facilitar la solución de la situación problemática 20, sobre trabajo mecánico utilizado para vaciar agua de un recipiente parabólico.

CONCEPTO	REGISTRO	REPRESENTACIÓN	OBJETO REPRESENTANTE	OBJETO REPRESENTADO	FUNCIONALIDAD	CONVERSIONES	TRATAMIENTOS
Trabajo exacto	Simbólico	$R_1^2(O_{10})$	O_{10}	Cantidad exacta de energía W necesaria para que la fuerza variable F vacíe el agua contenida en el recipiente parabólico de 4 pies de profundidad y 4 pies de radio de la boca.	Calcular el trabajo mecánico W , exacto, necesario para vaciar toda el agua contenida en el recipiente parabólico de 4 pies de profundidad y 4 pies de radio de la boca.		

	Simbólico	$R_1^5(O_{11})$	O_{11}	<p>i-ésima cantidad exacta de energía necesaria para que la i-ésima fuerza constante logre elevar la i-ésima rebanada de agua, desde la profundidad en que se encuentra, hasta el nivel de la boca del recipiente en forma de paraboloide.</p>	<p>Calcular el i-ésimo trabajo exacto, realizado por la i-ésima fuerza, para desplazar, la i-ésima masa de agua contenida en la i-ésima rebanada de la cubrimiento del volumen total, desde la profundidad donde se ubica hasta el nivel de la boca del recipiente en forma de paraboloide.</p>		<p>Cálculo simbólico de la: i-ésima cantidad exacta de energía necesaria para que la i-ésima fuerza desplace la i-ésima masa de agua contenida en la i-ésima rebanada de la cubrimiento del volumen total, desde la profundidad en que encuentra hasta en nivel de la boca del recipiente en forma de paraboloide.</p>
--	-----------	-----------------	----------	--	---	--	--

Trabajo aproximado	Simbólico	$R_1^5(O_{12})$	O_{12}	<p>Trabajo aproximado a W, Resultante de la suma extensiva de todos los n trabajos $\{w_i\}_{i=1}^n$ que realizan las n fuerzas $\{F_i\}_{i=1}^n$ para desplazar las n masas de agua, $\{m_i\}_{i=1}^n$, contenidas en las n rebanadas de la cubrimiento del recipiente en</p>	<p>Calcular el Trabajo aproximado a W, Resultante de la suma extensiva de todos los n trabajos $\{w_i\}_{i=1}^n$ que realizan las n fuerzas $\{F_i\}_{i=1}^n$ para desplazar las n masas de agua, $\{m_i\}_{i=1}^n$, contenidas en las n rebanadas de la cubrimiento del recipiente en forma</p>		<p>Suma simbólica extensiva de los n trabajos, $\{w_i\}_{i=1}^n$, realizados por las n fuerzas, $\{F_i\}_{i=1}^n$, para desplazar las n masas de agua, $\{m_i\}_{i=1}^n$, contenidas en las n rebanadas de la cubrimiento del recipiente en forma de paraboloide.</p>

				forma de paraboloide.	de paraboloide.		
Trabajo aproximado	Simbólico	$R_2^5(O_{12})$	O_{12}	Trabajo aproximado a W, Resultante de la suma con notación sigma, de todos los n trabajos $\{w_i\}_{i=1}^n$ que realizan las n fuerzas $\{F_i\}_{i=1}^n$ para desplazar las n masas de agua, $\{m_i\}_{i=1}^n$, contenidas en las n rebanadas de la cubrimiento del	Calcular el trabajo aproximado a W, Resultante de la suma con notación sigma, de todos los n trabajos $\{w_i\}_{i=1}^n$ que realizan las n fuerzas $\{F_i\}_{i=1}^n$ para desplazar las n masas de agua, $\{m_i\}_{i=1}^n$, contenidas en las n rebanadas de la cubrimiento del recipiente en forma		Suma simbólica con notación sigma, de los n trabajos, $\{w_i\}_{i=1}^n$, realizados por las n fuerzas, $\{F_i\}_{i=1}^n$, para desplazar las n masas de agua, $\{m_i\}_{i=1}^n$, contenidas en las n rebanadas de la cubrimiento del recipiente en forma de paraboloide.

				recipiente en forma de paraboloide.	de paraboloide.		
Trabajo exacto	Simbólico	$R_2^5(O_{10})$	O_{10}	Cantidad exacta de energía W necesaria para que la fuerza variable F vacíe el agua contenida en el recipiente parabólico de 4 pies de profundidad y 4 pies de radio de la boca, obtenida por suma con notación sigma.	Calcular el límite ($n \rightarrow \infty$) de la suma, con notación sigma, de los n trabajos $\{w_i\}_{i=1}^n$ que realizan las n fuerzas $\{F_i\}_{i=1}^n$ para desplazar las n masas de agua, $\{m_i\}_{i=1}^n$, contenidas en las n rebanadas de la cubrimiento del recipiente en forma de paraboloide.		Límite ($n \rightarrow \infty$) de la suma, con notación sigma, de los n trabajos $\{w_i\}_{i=1}^n$ que realizan las n fuerzas $\{F_i\}_{i=1}^n$ para desplazar las n masas de agua, $\{m_i\}_{i=1}^n$, contenidas en las n rebanadas de la cubrimiento del recipiente en forma de

							paraboloide.
Trabajo exacto	Simbólico	$R_3^5(O_{10})$	O_{10}	Cantidad exacta de energía W necesaria para que la fuerza variable F vacíe el agua contenida en el recipiente parabólico de 4 pies de profundidad y 4 pies de radio de la boca, representada por notación con integral definida.	Calculo de la cantidad exacta de energía W necesaria para que la fuerza variable F vacíe el agua contenida en el recipiente parabólico de 4 pies de profundidad y 4 pies de radio de la boca, representada por notación con integral definida.		Integral definida de la fuerza variable F(x) en [0, 4]

ANEXO V

Tabla de derivadas e integrales

TABLA DE DERIVADAS			TABLA DE INTEGRALES
Potencias			
1.	$y = u^n \quad (n \in R)$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$\int u^n \cdot u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + k \quad (n \neq -1)$
Exponenciales			
2.	$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$	$\int e^u \cdot u' dx = e^u + k$
3.	$y = a^u$	$y' = a^u \cdot La \cdot u'$	$\int a^u \cdot u' dx = \frac{a^u}{La} + k$
Logarítmicas			
4.	$y = Lu$	$y' = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u} dx = L u + k$
5.	$y = \lg_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \cdot \lg_a e$	Recuerda que: $\lg_a b = \frac{\lg_c b}{\lg_c a}$
Trigonométricas			
6.	$y = \operatorname{sen} u$	$y' = \cos u \cdot u'$	$\int \cos u \cdot u' dx = \operatorname{sen} u + k$
7.	$y = \cos u$	$y' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$	$\int \operatorname{sen} u \cdot u' dx = -\cos u + k$
8.	$y = \operatorname{tg} u$	$y' = \sec^2 u \cdot u'$	$\int \sec^2 u \cdot u' dx = \operatorname{tg} u + k$
9.	$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int \frac{u' dx}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} u + k$
10.	$y = \operatorname{arc} \cos u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int \frac{u' dx}{\sqrt{1-u^2}} = -\operatorname{arc} \cos u + k$

11.	$y = \operatorname{arc\,tg} u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$	$\int \frac{u' dx}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + k$
Operaciones más usuales en derivadas e integrales			
12.	$y = k \cdot u$	$y' = k \cdot u'$	$\int (u + v) \cdot dx = \int u \cdot dx + \int v \cdot dx$
13.	$y = u + v$	$y' = u' + v'$	Integración por partes: <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$</div>
14.	$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$	
15.	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$	Regla de la cadena: Si $y(x)=y[u(v(x))]$ \rightarrow <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$</div>
16.	$y = u^v$	$y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot L u \cdot v'$	Derivada de la función inversa: Si $y = f(x)$; $x = g(y)$ $\rightarrow g' = 1/f'$
Observaciones: a) Las letras u y v representan funciones de x: $u = u(x)$; $v = v(x)$; $k \in R$; L: logaritmo neperiano b) Cuando $u(x) = x \rightarrow u'(x) = 1$, obtenemos las derivadas e integrales simples			

TABLA DE DERIVADAS E INTEGRALES versión B

Fuente: <https://matemairena.files.wordpress.com/2011/05/tabla-de-derivadas-e-integrales-versic3b3n-b2.doc>

ANEXO VI

Applets:

Applet 1: <https://www.geogebra.org/m/fryenrad>

Applet 2: <https://www.geogebra.org/m/gv3qwrva>

UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO

ESCUELA DE POSGRADO

DICTAMEN DE LA SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO(A) EN EDUCACIÓN CON MENCIÓN EN DOCENCIA Y GESTIÓN EDUCATIVA

El/La BACHILLER **ESPINOLA LOPEZ, HOLGER ANDRES**, para obtener el Grado Académico de MAESTRO(A) EN EDUCACIÓN CON MENCIÓN EN DOCENCIA Y GESTIÓN EDUCATIVA, ha sustentado la Tesis titulada:

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA PARA EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA INTEGRAL DEFINIDA Y SUS APLICACIONES EN EL CÁLCULO INTEGRAL NIVEL UNIVERSITARIO, autorizada mediante la Resolución Jefatural N° 1023 / 2019 – EPG – UCV

El jurado evaluador emitió el dictamen de:

A PROBAR POR EXCELENCIA

Habiendo recomendado lo siguiente:

Trujillo, 12 DE NOVIEMBRE 2019

PRESIDENTE: MG. LEZCANO TELLO, ASUNCION RAMON

SECRETARIO: MG. PEREDA GUANILO, VICTOR IVAN

VOCAL: DRA. DURAN LLARO, KONY LUBY